Exercice 1. Préciser si la fonction définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme du second degré. Si oui, identifier les coefficients a, b, c dans l'expression $ax^2 + bx + c$.

a) $f(x) = 3x(x + 2) - 5x$ **b)** $g(x) = (2x + 1)^2 - 4x^2$
c) $h(x) = (x - 2)^2 - (x + 2)^2$ **d)** $k(x) = 5(x^2 - 3)$

Exercice 2. Compléter pour mettre sous forme canonique.

a) $x^2 - 2x + 3 = (x - \dots)^2 + \dots$ **b)** $x^2 + 2x + 3 = (x - \dots)^2 + \dots$
c) $x^2 + 2x - 3 = (x - \dots)^2 - \dots$ **d)** $3x^2 - 6x + 1 = \dots(x - \dots)^2 + \dots$
e) $3x^2 + 6x + 1 = \dots(x - \dots)^2 + \dots$ **f)** $3x^2 - 6x - 1 = \dots(x - \dots)^2 + \dots$

Exercice 3. Pour les fonctions suivantes, déterminez la forme canonique, puis les variations et le maximum ou minimum. Vérifiez vos résultats en regardant la représentation graphique de la fonction.

1. La fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$.
2. La fonction f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_2(x) = -x^2 + 4x - 5$.

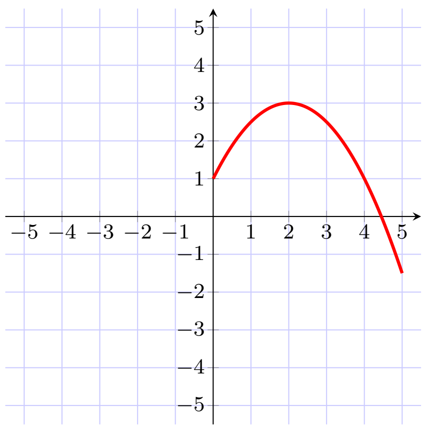
Exercice 4.

1. Montrer que $4(x - 1{,}5)^2 - 9$ est la forme canonique de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = 4x^2 - 12x.$$
2. En déduire le tableau de variations de g.

Exercice 5.

Une fonction f polynôme du second degré est représentée graphiquement ci-contre sur l'intervalle $[0; 5]$.

— Déduire de cette représentation graphique la forme canonique de de la fonction f.



Exercice 6. La quantité de sucre $q(x)$ (en kg) présente dans 100 kg de betteraves sucrières est donnée par
$$q(x) = -0{,}004x^2 + x - 40$$
où x est la masse (en kg) d'engrais répandue à l'hectare, avec $x \in [60; 180]$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [60; 180]$, on a
$$q(x) = -0{,}004(x - 125)^2 + 22{,}5.$$
2. En déduire, à l'aide du tableau de variations de q, la masse x d'engrais répandue à l'hectare pour que la quantité du sucre soit maximale.

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ en utilisant la méthode la plus pertinente.

a) $-2x^2 - 5x + 3 = 0$ **b)** $x^2 + 7x = 0$
c) $5x^2 + 7x + 18 = 0$ **d)** $x^2 + x + 1 = 0$

Exercice 8.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^2 + 3x - 5.$$
   (a) Tracer la courbe représentative de f avec la calculatrice.
   (b) Donner les valeurs approchées des éventuelles solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = 2x^2 + 3.$$
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = g(x)$.
   (b) Que peut-on déduire pour les courbes représentatives de f et g ? Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Exercice 9. Pour chacune des fonctions polynôme du second degré, déterminer ses racines éventuelles et une forme factorisée le cas échéant.

a) $f : x \mapsto 4x^2 + x + 9$ **b)** $g : x \mapsto 4x^2 + 13x + 9$

Exercice 10.

1. Dresser le tableau de variation des fonctions f et g suivantes définies sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations $f(x) \geq 0$ et $g(x) < 0$.

a) $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 6x + 18$ **b)** $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$

Exercice 11. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $4x^2 - 7 \leq 0$ **b)** $3x^2 - 5x < 4x + 5$

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{10x}{x^2 + 2x + 4}.$$

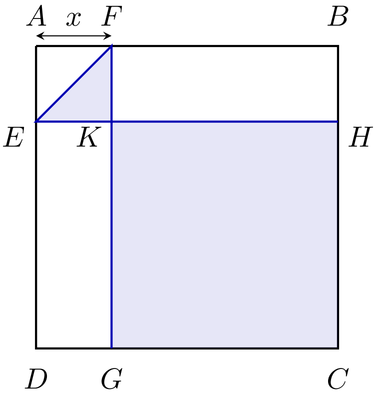
1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le signe de la fonction f.
3. Dresser le tableau de signes de $f(x)$, puis valider ou corriger la conjecture émise à la question précédente.

Exercice 13.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = 3x^2 - 5x + 2.$$
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.
   (a) Conjecturer, à l'aide de la calculatrice, la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe des abscisses.
   (b) Dresser par le calcul le tableau de signes de la fonction f, puis valider ou corriger la conjecture précédente.
2. On considère maintenant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = -x^2 + x + 1.$$

(a) Étudier le signe de $f(x) - g(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.
(b) Que peut-on déduire pour les représentations graphiques de f et g ?
(c) Vérifier à l'aide de la calculatrice.

Exercice 14 ($\star$).
La figure ci-contre représente le logo d'une entreprise. Le quadrilatère $ABCD$ est un carré de côté 4 cm. Les quadrilatères $AFKE$ et $KHCG$ sont aussi des carrés. Le créateur du logo souhaite que l'aire de la surface en bleu soit la plus petite possible.



1. À quel intervalle appartient x ?
2. Déterminer les longueurs FK et EK en fonction de x. En déduire l'aire du triangle EFK en fonction de x.
3. Déterminer la longueur KH en fonction de x puis l'aire du carré $KHCG$ en fonction de x.
4. En déduire l'aire de la figure bleue en fonction de x.
5. Pour quelle valeur de x la partie bleue a-t-elle la plus petite aire ?

Exercice 15 ($\star$). Une entreprise produit chaque jour une quantité x de chargeurs d'ordinateur comprise entre 0 et 50. Une étude a montré que le coût total de production de x chargeurs d'ordinateur est donné, en euro, par
$$C(x) = 3x^2 - 100x + 900.$$
Un chargeur d'ordinateur est vendu 20 euros.

1. Combien coûte la fabrication de 10 chargeurs ?
2. Combien rapporte la vente de x chargeurs ?
3. Montrer que le bénéfice (c'est-à-dire l'argent obtenu par la vente, moins les coûts de production) de x chargeurs est
$$B(x) = -3x^2 + 120x - 900.$$
4. (a) Déterminer la forme canonique de B.
   (b) Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle $[0; 50]$.
   (c) En déduire le bénéfice maximal de l'entreprise. Pour combien de chargeurs a-t-il lieu ?
5. (a) Dresser le tableau de signes de la fonction B sur l'intervalle $[0; 50]$.
   (b) Combien de chargeurs l'entreprise doit-elle vendre pour être rentable *(c'est-à-dire avoir un bénéfice positif)* ?

Exercice 16 ($\star\star$). Un club de vacances organise un weekend avec des activités de plein air. Le nombre maximum de participants est fixé à 60. Le prix par personne est de 50 euros pour les 30 premiers. Pour tout participant supplémentaire, chaque personne bénéficie d'une remise de 1 euro. Par exemple, si 35 personnes s'inscrivent à ce weekend, le prix par personne sera de 45 euros.
Pour quel nombre de participants le club gagnera-t-il le plus d'argent ?

Exercice 17 ($\star\star$).

$ABCD$ est un carré de côté 4. Soit $x \in [0; 4]$ et E le point de $[AB]$ tel que $AE = x$. Soit aussi F le point de $[AD]$ tel que $DF = x$.
Déterminer la valeur de x pour que l'aire du triangle FEC soit minimale.