Exercice 1. On considère A et B deux événements. On rappelle que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

1. Si $P(A) = 0{,}5$, $P(\overline{B}) = 0{,}7$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$, calculer $P(B)$ puis $P(A \cup B)$.
2. Si $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$, que vaut $P(A \cap B)$?

Exercice 2. Quand il commande une pizza à emporter, Jonas a remarqué que le temps d'attente annoncé est 5, 10, 15 ou 20 minutes avec les probabilités $p_5 = 0{,}3$, $p_{10} = 0{,}2$, $p_{15} = 0{,}1$ et p_{20}.

1. Déterminer la probabilité, notée p_{20}, que le temps d'attente soit de 20 minutes.
2. Quelle est la probabilité d'attendre 10 minutes ou moins ?

Exercice 3. Dans son placard, Valérie a des bols et des tasses avec ou sans anse selon la répartition ci-dessous.

	Bol	**Tasse**	**Total**
Avec anse	2	9	11
Sans anse	6	3	9
Total	8	12	20

Le matin, elle prend un de ces récipients au hasard pour prendre son café et on considère les événements

— A : « Le récipient a une anse. »

— B : « Le récipient est un bol. »

1. Déterminer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.
2. Décrire chacun des événements $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A} \cap B$ par une phrase et donner sa probabilité.
3. Écrire l'événement « Le récipient est une tasse sans anse » à l'aise des événements A et B.
4. Associer chacune des phrases suivantes à la valeur qui lui correspond.
   (a) Probabilité qu'une tasse ait une anse — (1) $\frac{9}{20}$
   (b) Probabilité qu'un récipient à anse soit une tasse — (2) $\frac{9}{11}$
   (c) Probabilité qu'un récipient soit une tasse à anse — (3) $\frac{9}{12}$

Exercice 4.

Lors d'une enquête portant sur les 2000 salariés d'une entreprise, on a obtenu les informations suivantes :

	< 40 ans	**≥ 40 ans**	**Total**
Cadres			
Non cadres			
Total			2000

— 30% des salariés ont 40 ans ou plus ;

— 40% des salariés de plus de 40 ans sont des cadres ;

— 25% des salariés de moins de 40 ans sont des cadres ;

1. Compléter le tableau ci-contre.
2. On interroge au hasard un employé de cette entreprise. On considère les événements A : « la personne interrogée a 40 ans ou plus » et B : « la personne interrogée est cadre ».
   (a) Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$ des événements A et B.
   (b) Définir par une phrase chacun des événements $A \cap B$ et $A \cup B$.
   (c) Calculer les probabilités $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$.
3. Sachant que la personne a 40 ans ou plus, quelle est la probabilité que ce ne soit pas un cadre ?

Exercice 5. Soient A et B deux événements tels que $P_A(B) = 0{,}8$, $P_B(A) = 0{,}6$ et $P(A) = 0{,}4$.

1. Calculer $P(A \cap B)$.
2. En déduire $P(B)$.
3. Calculer alors $P(A \cup B)$.

Exercice 6. On lance un dé équilibré à six faces et on considère les événements A : « obtenir $4, 5, 6$ » et B : « obtenir un nombre pair ».

1. Calculer $P_B(A)$.
2. Calculer $P_A(B)$.
3. Calculer $P_{A\cap B}(A \cup B)$.

Exercice 7. Dans une forêt, il y a 30% d'épicéas et 70% de sapins. Un parasite infecte 10% des arbres. Les épicéas représentent 20% des arbres touchés.

1. Quelle est la probabilité qu'un épicéa soit touché par le parasite ?
2. Faire un tableau pour résumer l'ensemble de la situation.

Exercice 8. Vincent et Anne sont haltérophiles. La probabilité pour que Vincent soulève plus de 100 kg est égale à 0,75, alors que la probabilité pour qu'Anne soulève plus de 100 kg est égale à 0,6. La probabilité pour qu'au moins l'un des deux soulève plus de 100 kg est égale à 0,85.

1. Quelle est la probabilité qu'ils soulèvent 100 kg tous les deux ?
2. Anne vient de voir Vincent soulever 100 kg. Quelle est la probabilité qu'elle soulève 100 kg ?

Exercice 9. Une urne opaque contient trois boules rouges, une boule noire et une boule verte, toutes indiscernables au toucher. On procède au tirage, sans remise, de trois boules dont on note la couleur. Déterminer la probabilité d'obtenir trois boules de couleurs différentes.

Exercice 10. Dans une crèche, chaque matin, Hapsatou fait la sieste avec une probabilité de 0,7. Si elle a fait la sieste le matin, elle fera à nouveau la sieste l'après-midi avec une probabilité de 0,2. Sinon, elle fera la sieste l'après-midi avec une probabilité de 0,9.

1. Représenter la situation avec un arbre de probabilité que l'on complètera entièrement.
2. Calculer la probabilité qu'elle de fasse pas du tout la sieste dans la journée.
3. Calculer la probabilité qu'elle fasse la sieste l'après-midi.

Exercice 11. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10 000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1%.

1. Sans faire de calculs (intuitivement), ce test semble-t-il performant ?
2. Représenter la situation par un arbre de probabilité.
3. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade sachant que son test est positif.
4. Que penser de ce test ?

Exercice 12. On jette un dé non truqué à 20 faces numérotées de 1 à 20. On note

— A : « Le résultat est pair. »
— B : « Le résultat est l'un des nombres $1; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19$. »
— C : « Le résultat est impair. »
— D : « Le résultat est l'un des nombres 9 ou 15. »
— E : « Le résultat est un nombre premier. »

1. Les événements E et A forment-ils une partition de l'univers ?
2. Les événements C et $\overline{B}$ forment-ils une partition de l'univers ?
3. Parmi ces cinq événements, en donner deux qui forment une partition de l'univers.
4. Parmi ces cinq événements, en donner trois qui forment une partition de l'univers.

Exercice 13. Dans chacun des cas suivants, dire si les événements A et B sont indépendants.

1. $P(A) = 0{,}2$, $P(B) = 0{,}8$, et $P(A \cap B) = 0{,}2$.
2. $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}8$, et $P(A \cap B) = 0{,}32$.
3. $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$, et $P(A \cup B) = 0{,}65$.
4. $P(A) = 0{,}48$, $P(B) = 0{,}8$, et $P(A \cap B) = 0$.

Exercice 14. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Dans chacun des cas suivants, dire si les événements sont indépendants.

1. A : « tirer un roi » et B : « tirer un rouge »

2. A : « tirer un roi » et B : « ne pas tirer un as »
3. A : « tirer un roi ou tirer une dame rouge » et B : « tirer un rouge »

Exercices bilan

Exercice 15. À l'occasion d'une cérémonie, un pâtissier confectionne un assortiment de 180 pâtisseries composé d'éclairs et de religieuses qui sont soit au chocolat, soit au café. Les deux tiers de ces pâtisseries sont des éclairs. On sait également qu'il y a 100 pâtisseries au chocolat parmi lesquels un quart sont des religieuses. Soit E l'événement : « la pâtisserie est un éclair » et C l'événement : « la pâtisserie est au chocolat ».

1. À partir des indications de l'énoncé, compléter le tableau suivant.

	Chocolat	**Café**	**Total**
Éclairs			
Religieuses			
Total			

2. Antoine choisit au hasard un gâteau parmi toutes les pâtisseries. Calculer la probabilité qu'il s'agisse :
   (a) d'une religieuse ;
   (b) d'une pâtisserie au café.
3. Décrire en français l'événement $E \cap C$, puis calculer sa probabilité.
4. Calculer la probabilité de l'événement : « la pâtisserie est un éclair ou est une pâtisserie au chocolat ».
5. Calculer $P_E(\overline{C})$. Interpréter ce résultat.
6. Les événements E et C sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 16. En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs. Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47% affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B. Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20% des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

— A l'événement « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
— B l'événement « la personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
— V l'événement « la personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.
2. Donner $P_A(V)$ et $P_B(\overline{V})$.
3. Calculer la probabilité qu'une personne interrogée vote pour le candidat A et dise la vérité.
4. (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.
   (b) En déduire le nombre de personnes qui disent la vérité à ce sondage.
   (c) Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.
5. (a) On note E l'événement « la personne choisie vote effectivement pour le candidat A ». Exprimer E en fonction des événements A, B et V.
   (b) Montrer que la probabilité de l'événement E est 0,529.

Exercices plus théoriques

Exercice 17 ($\star$). Soient A et B deux événements incompatibles ($P(A \cap B) = 0$) de probabilités non nulles. Démontrer que A et B ne sont pas indépendants.

Exercice 18 ($\star$). On considère A un événement indépendant de lui-même. Démontrer que $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

Exercice 19 ($\star\star$). On considère deux événements A et B tels que $P(A \cap B) = 0{,}8$ et $P(A \cup B) = 0{,}9$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1{,}7x + 0{,}8 = (x - 0{,}85)^2 + 0{,}0775$.
2. Montrer que A et B ne peuvent pas être indépendants.

Des paradoxes

Exercice 20. On considère que la probabilité de donner naissance à une fille est la même que celle de donner naissance à un garçon. De plus, on admet que le sexe d'un enfant à la naissance est indépendant du sexe des enfants nés avant.
Manuel a deux enfants. Lorsque le facteur est venu sonner à sa porte pour lui apporter un colis, c'est une fille qui a répondu. On ne sait pas si cette fille est l'aînée des deux enfants ou pas. Quelle est la probabilité que l'autre enfant de Manuel soit un garçon : $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$? Justifier.

Exercice 21 (Paradoxe de Monty-Hall). Lors d'un jeu télévisé, une candidate est placée devant trois portes fermées. Derrière l'une d'elle se trouve une voiture, tandis que derrière chacune des deux autres portes il n'y a rien. Le jeu se déroule en trois étapes :

(a) La candidate choisit d'abord une première porte.

(b) Le présentateur va alors ouvrir une autre porte, différente de celle choisie par la candidate, derrière laquelle il n'y a rien.

(c) Le présentateur propose à la candidate de modifier son choix, et ouvre la porte finalement choisie par la candidate, qui gagne la voiture si elle est derrière la porte choisie.

1. Intuitivement, quelle est la probabilité que la voiture soit derrière la porte choisie par la candidate au début du jeu ? À l'issue de l'étape (b) ? Vérifier par le calcul (un arbre peut être utile !).
2. La candidate a-t-elle intérêt à modifier son choix lorsque le présentateur lui propose de le faire ?