Chapitre 5 : Variables aléatoires

1 Notion de variable aléatoire réelle

Définition 1 (Variable aléatoire)

Soit Ω l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire (Ω est l'**univers**). Une **variable aléatoire** sur Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Définition 2 (Événement défini à partir d'une variable aléatoire)

Soient X une variable aléatoire définie sur Ω et $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel.

— L'événement « X **prend la valeur** x » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x.

— L'événement « X **prend des valeurs supérieures ou égales à** x » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel inférieur ou égal à x.

— L'événement « X **prend des valeurs inférieures ou égales à** x » est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel inférieur ou égal à x.

Notation 3

Ces trois événements sont respectivement notés $\{X = x\}$, $\{X \geq x\}$ et $\{X \leq x\}$.

Notation 4

L'ensemble des valeurs prises par une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est noté $X(\Omega)$.

Exemple 1

On lance un dé à six faces. Si on obtient un multiple de 3, on gagne 2 euros ; sinon, on perd 1 euro. On note X la variable aléatoire qui, à chaque lancer associe le gain obtenu (ce gain peut éventuellement être négatif).

— L'événement $\{X = 2\}$ est réalisé lorsque l'on obtient un multiple de 3.

— L'événement $\{X \leq 0\}$ est réalisé lorsque le gain est négatif, c'est-à-dire lorsque l'on n'obtient pas un multiple de 3.

— On a ici $X(\Omega) = \{2, -1\}$.

Application 2

Un restaurant propose trois menus dont les prix respectifs sont 10, 12 et 18 euros. Il y a actuellement 100 clients dans le restaurant.

1. On choisit une personne au hasard dans ce restaurant et on lui demande le prix de son menu. Donner l'univers Ω_1 de cette expérience aléatoire, ainsi que la variable aléatoire X_1 que l'on peut définir.
2. On choisit un menu au hasard et on s'intéresse au nombre de personnes dans le restaurant ayant choisi ce menu. Donner l'univers Ω_2 de cette expérience aléatoire, ainsi que la variable aléatoire X_2 que l'on peut définir.

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

Définition 5 (Probabilité d'un événement $\{X = x_i\}$)

La **probabilité d'un événement** $\{X = x_i\}$ est la somme des probabilités des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i.

Définition 6 (Loi de probabilité)

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$. Définir la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i prise par X la probabilité de l'événement $P(\{X = x_i\})$.

Remarque

— On présente souvent la loi de probabilité d'une variable aléatoire sous la forme d'un tableau.

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

— On note souvent uniquement $P(X = x_i)$ au lieu de $P(\{X = x_i\})$ afin de simplifier les notations.

Application 3

Un jeu consiste à lancer deux fois de suite une pièce de monnaie. On gagne 5 euros chaque fois qu'on obtient pile et on perd 2 euros à chaque fois qu'on obtient face. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le gain, éventuellement négatif, obtenu à la fin.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. En déduire $P(X \leq 3)$ puis $P(X > 3)$.

3 Espérance, variance et écart-type

Dans toute cette partie, X est une variable aléatoire réelle définie sur un univers Ω prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$.

3.1 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 7 (Espérance)

L'**espérance** de X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \\ &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n. \end{aligned}$$

Remarque

Le nombre $E(X)$ peut s'interpréter comme la moyenne des valeurs prises par X lorsque l'expérience aléatoire est répétée **un très grand nombre de fois**.

Application 4

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

x_i	-2	1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Donner l'espérance de X.

Application 5

On lance deux dés cubiques équilibrés et on additionne les nombres obtenus sur chacune des faces. On définit X comme la variable aléatoire égale à la somme des deux résultats.

1. Quelles sont les valeurs prises par X ?
2. En utilisant un tableau à double entrée, déterminer la loi de probabilité de X.
3. On décide de jouer au jeu suivant : si le nombre obtenu est multiple de 3, le joueur gagne 4 euros ; sinon il perd 2 euros. On note Y la variable aléatoire égale au gain du joueur.
   (a) Donner la loi de probabilité de Y.
   (b) Calculer l'espérance de Y.

Remarque

Lorsque les valeurs prises par X représentent les gains (ou pertes) à un jeu, alors $E(X)$ représente le gain moyen par partie.

— Si $E(X) > 0$, alors le jeu est **favorable** au joueur ;
— Si $E(X) < 0$, alors le jeu est **défavorable** au joueur ;
— Si $E(X) = 0$, alors le jeu est **équitable**.

3.2 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition 8 (Variance et écart-type)

La **variance** de X est le réel positif, noté $\mathrm{Var}(X)$, défini par

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - E(X))^2 \\ &= p_1(x_1 - E(X))^2 + \cdots + p_n(x_n - E(X))^2.\end{aligned}$$

L'**écart-type** de X est le nombre positif, noté $\sigma(X)$, défini par $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

Application 6

Une roue est partagée en 10 secteurs angulaires dont 5 sont colorés en rouges, 3 en vert et 2 en jaune. On mise 3 euros pour tourner la roue et elle s'arrête au hasard sur un secteur angulaire. Si celui-ci est vert, on gagne 5 euros, s'il est jaune, on gagne 10 euros et s'il est rouge, on ne gagne rien.

1. Donner les différentes valeurs de X.
2. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer $E(X)$.
4. Interpréter le résultat précédent. Ce jeu est-il équitable ?
5. À l'aide de la calculatrice, déterminer $\mathrm{Var}(X)$ et $\sigma(X)$.