Chapitre 3 : Suites

1 Définition et mode de génération

Intuitivement, une **suite** est une liste ordonnée et infinie de nombres réels :

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

$$1, 3, 5, 7, 9, \dots$$

Définition 1 (Suite numérique)

Une **suite numérique** u, également notée (u_n), est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & u(n) \end{array}$$

Notation 2

Le terme $u(n)$ est le plus souvent noté u_n.
La suite u est parfois aussi notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque

Parfois le premier terme de la suite u n'est pas u_0 mais u_1 ou un indice encore supérieur.

Remarque

Attention ! Il ne faut pas confondre le terme u_n et la suite (u_n).

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie arbitrairement sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 2 \ ; \ u_1 = 3 \ ; \ u_2 = 741 \ ; \ u_4 = -12$$

Définition 3 (Définition explicite d'une suite)

Une suite est définie **explicitement** lorsque l'on peut calculer n'importe quel terme de la suite directement en fonction de n. On donne alors l'expression du **terme général** u_n en fonction de n.

Exemple 2

La suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 2n + 1$ est définie expicitement. On a

$$v_4 = 2 \times 4 + 1 = 9 \qquad v_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21 \qquad v_{58} = 2 \times 58 + 1 = 117$$

Application 3
Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = 10n - 5$. Calculer les termes w_3, w_{10}, w_{42}, et w_{101}.

Définition 4 (Définition par récurrence)
Une suite (u_n) est définie **par récurrence** lorsqu'elle est définie par la donnée de son premier terme et d'une relation qui permet de calculer un terme à partir du terme précédent. On donne donc l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n. Cette relation est appelée **relation de récurrence**.

Exemple 4
La suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par le premier terme $a_0 = 4$ et, pour tout entier n, par $a_{n+1} = 2a_n + 1$ est définie par récurrence. Pour trouver $a_4 = 79$, il faut calculer a_3, qui nécessite de calculer a_2, qui nécessite à son tour de calculer a_1, que l'on calcule grâce à

$$a_1 = 2a_0 + 1 = 2 \times 4 + 1 = 9.$$

Puis on trouve

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \times 9 + 1 = 19 \\ a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \times 19 + 1 = 39 \\ a_4 &= 2a_3 + 1 = 2 \times 39 + 1 = 79. \end{aligned}$$

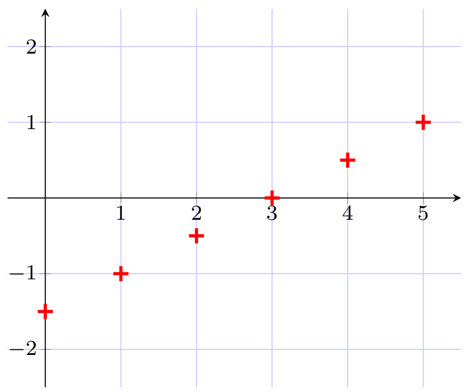
Application 5
Calculer les trois premiers termes de la suite (b_n) définie par $b_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $b_{n+1} = 2b_n - 5n$.

2 Représentation graphique d'une suite

Définition 5 (Représentation graphique d'une suite)
Dans un repère du plan, une **représentation des termes** de la suite (u_n) est l'ensemble des points M_n de coordonnées (n, u_n) avec $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. On obtient ce que l'on appelle un **nuage de points**.

Exemple 6

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n}{2} - 1.5$. On représente le nuage de points (n, u_n) sur la figure ci-contre.
Les points dans le repère ont donc les coordonnées suivantes : $(0; -1.5)$, $(1; -1)$, $(2; -0.5)$, $(3; 0)$, $(4; 0.5)$, et $(5; 1)$.



Application 7
Dans un repère, représenter les trois premiers termes de de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 2 - 1{,}5n.$$

3 Sens de variation

Définition 6 (Suite croissante)
Une suite (u_n) est **croissante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier $n \geq n_0$, on a

$$u_{n+1} \geq u_n.$$

Définition 7 (Suite décroissante)
Une suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang n_0 lorsque, pour tout entier $n \leq n_0$, on a

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

Définition 8 (Suite monotone)
Une suite est dite **monotone** à partir du rang n_0 lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante à partir du rang n_0.

Exemple 8
Soit z la suite définie par $z_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n - 2$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} z_{n+1} - z_n &= -2 \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Donc la suite z est décroissnte à partir de $n = 0$.

Application 9
Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier $n > 0$ par $u_n = \frac{1}{n}$.
Indication : on pourra étudier la différence de u_{n+1} et u_n.

Application 10
Étudier le sens de variation des suites suivantes.

1. La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 3n + 1$.
2. La suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{n-4}{n+5}$.
3. La suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = -2 \times 7^n$.

Remarque
Attention ! Toutes les suites ne sont pas croissantes ou décroissantes. Parfois, une suite ne sera ni l'un ni l'autre.

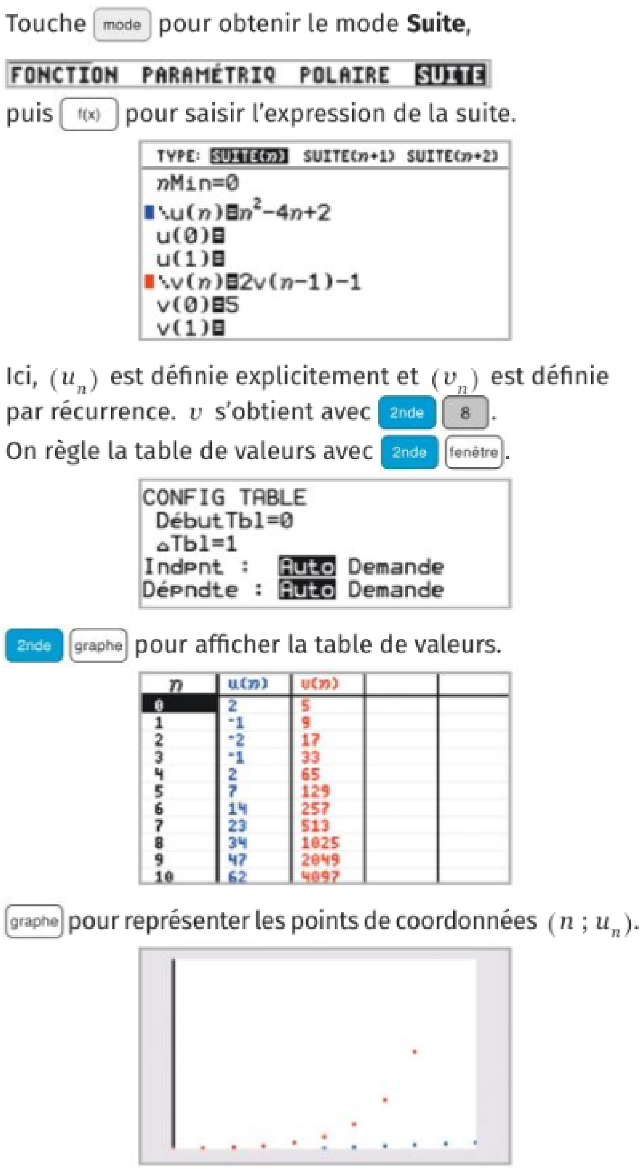
Méthode
Pour trouver le sens de variation d'une suite (u_n) on peut calculer la différence $u_{n+1} - u_n$ et regarder son signe.

— Si c'est **positif**, la suite est **croissante**.

— Si c'est **négatif**, la suite est **décroissante**.

4 Utilisation de la calculatrice

La calculatrice est très utile pour représenter graphiquement une suite ou obtenir les premiers termes de la suite. Un mode d'emploi est donné dans l'image ci-contre.



Soit (u_n), (v_n), et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = n^3 - n^2 + 1$$

$$v_0 = 10 \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 1$$

$$w_0 = 1 \text{ et } w_{n+1} = w_n + n$$

Compléter le tableau de valeurs suivant à l'aide de la calculatrice.

n	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{u_n}$						
$\mathbf{v_n}$						
$\mathbf{w_n}$						

5 Limites de suites

Application 11

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 3 - \frac{5}{n+1}.$$

n	0	1	2	5	10	25	50	100	200	500
$\mathbf{u_n}$										

1. À l'aide de la calculatrice, remplir le tableau de valeur ci-dessus.
2. Vers quele valeur semble se rapprocher cette suite lorsque n est très grand ?

Notation 9

Lorsque les termes u_n d'une suite se rapprochent d'un réel ℓ quand n tend vers $+\infty$, on dit que u **converge** vers ℓ et on note

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell.$$

Définition 10 (Limite)

Lorsqu'on a u une suite et $\ell \in \mathbb{R}$ un réel tel que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell,$$

on dit que ℓ est la **limite** de la suite u.

Application 12

On considère les cinq suites suivantes.

$$u_n = n^2 \qquad v_n = \frac{1}{n} \qquad w_n = (-1)^n \qquad t_n = -2^n \qquad s_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

n	u_n	v_n	w_n	t_n	s_n
1					
5					
10					
25					
50					
100					

1. Compléter le tableau ci-dessus.
2. Quel semble être le comportement à l'infini des suites u, v, w, t et s ?

Notation 11

Lorsque u_n devient de plus en plus grand quand n tend vers $+\infty$, on dit que u **diverge** vers $+\infty$ et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Notation 12

Lorsque u_n est négatif et devient de plus en plus grand en valeur absolue quand n tend vers $+\infty$, on dit que u **diverge** vers $-\infty$ et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty.$$

Définition 13 (Absence de limite)

Lorsque les valeurs de u_n ne se stabilisent autour d'aucune valeur réelle, on dit que u diverge et n'admet pas de limite.