Chapitre 8 : Suites arithmétiques et géométriques

1 Suites arithmétiques

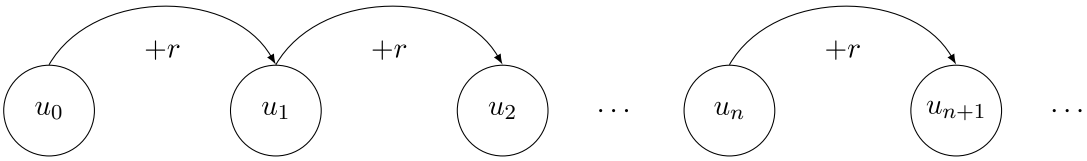
1.1 Définition

Définition 1 (Suite arithmétique)

On dit que la suite (u_n) est **arithmétique** s'il existe un réel r tel que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre r est appelé la **raison** de la suite.



Remarque

— Pour passer d'un terme à l'autre, on ajoute la raison r, on a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $r = u_{n+1} - u_n$.

— La raison r ne dépend pas de n.

Application 1

Pour chacune des suites suivantes, déterminer si elles sont arithmétiques ou non. Si oui, déterminer la raison et le premier terme.

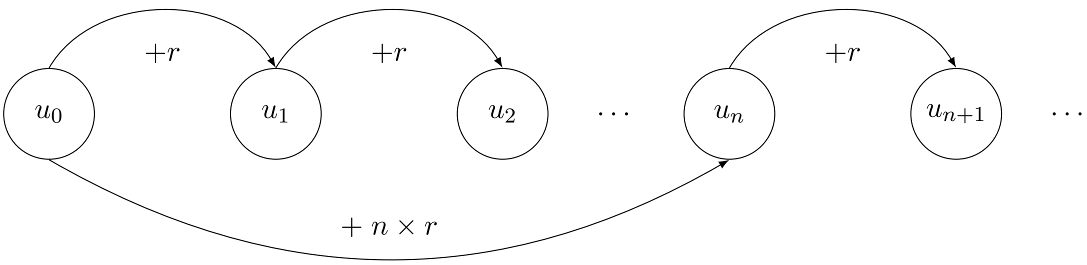
1. La suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n - 8$.
2. La suite (b_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $b_n = n^2 + 2n + 4$.
3. La suite (c_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $c_n = 3n + 1$.

1.2 Expression

Propriété 1

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + n \times r$.
Plus généralement, on a

$$\forall p,n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p + (n - p) \times r.$$



Application 2

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = 2$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
4. En déduire la valeur de u_{50}.
5. Déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 8$.

1.3 Représentation graphique

Propriété 2

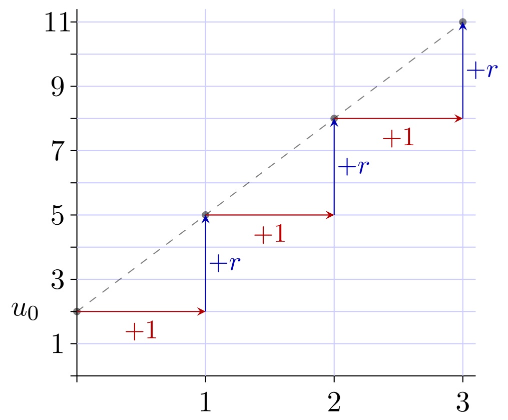
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0. Les points de sa représentation graphique se situent sur la droite d'équation $y = r \times x + u_0$. On parle d'évolution linéaire.

Exemple 3

Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 3$. On a donc

$$u_n = 2 + 3n,$$

et les termes de la suite sont sur la droite d'équation $y = 3x + 2$.



1.4 Sens de variation

Propriété 3

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

— Si $r > 0$, alors la suite est strictement **croissante**.

— Si $r < 0$, alors la suite est strictement **décroissante**.

— Si $r = 0$, alors la suite est **constante**.

Application 4

Soit u la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 5$. Soit également w la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $w_n = 8 - 7n$. Déterminer la nature de chaque suite, puis en déduire son sens de variation.

1.5 Suite auxiliaire et suite arithmétique

Application 5

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$.
On désigne par (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{2}{u_n}$.

1. Démontrer que la suite w est une suite arithmétique dont on précisera la raison.
2. En déduire l'expression de w, puis celle de (u_n) en fonction de n.

2 Suites géométriques

2.1 Définition

Définition 2 (Suites géométriques)

On dit qu'une suite (u_n) est **géométrique** s'il existe un réel $q \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Le nombre q est appelé la **raison** de la suite.

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{n+1} & \cdots \end{tikzcd}$$

Remarque

- Pour passer d'un terme à l'autre, on multiplie par la raison q, on a donc, pour une suite $(u_n)_n$ de termes non nuls, $\forall n \in \mathbb{N}$, $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
- La raison q ne dépend pas de n.

Application 6

Pour chacune des suites suivantes, dire si elles sont géométriques ou non. Si oui, déterminer la raison et le premier terme.

1. La suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = 12$ et $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$.
2. La suite (b_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $b_n = \frac{7}{2^n}$.
3. La suite (c_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $c_n = \frac{3n+2}{n+1}$.

2.2 Expression

Propriété 4

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 \times q^r$.
Plus généralement, on a

$$\forall p,n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

$$\begin{tikzcd} u_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] \arrow[rrrr, bend right, "\times q^n"'] & u_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_2 & \cdots & u_n \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{n+1} & \cdots \end{tikzcd}$$

Application 7

Une ville comptait 10 000 habitants en 2018. Chaque année, le nombre d'habitants augmente de 8% par rapport à l'année précédente. On note u_n le nombre d'habitants en $2018 + n$.

1. Donner les valeurs de u_0 et u_1.
2. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, et préciser la raison.
3. Exprimer u_n en fonction de n.
4. Quel sera le nombre d'habitants de cette ville en 2032 ?

5. En quelle année le nombre d'habitants de la ville dépassera-t-il 25 000 habitants ?

2.3 Représentation graphique

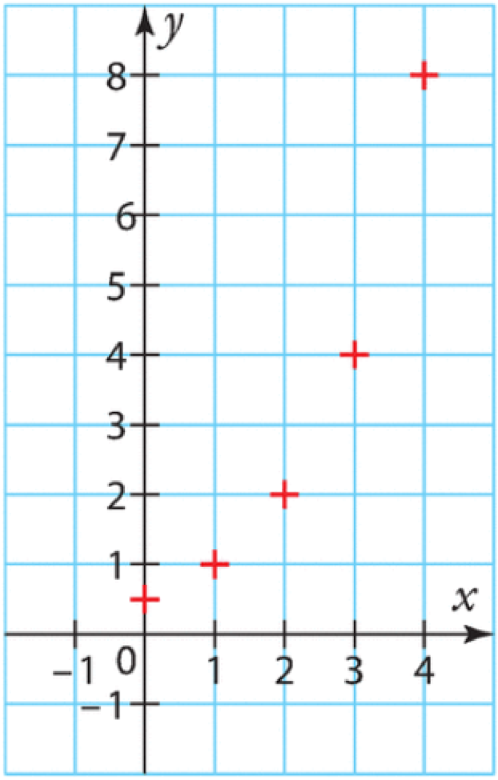
Propriété 5

Pour les représentations graphiques des suites géométriques, on parle d'**évolution exponentielle**.

Exemple 8

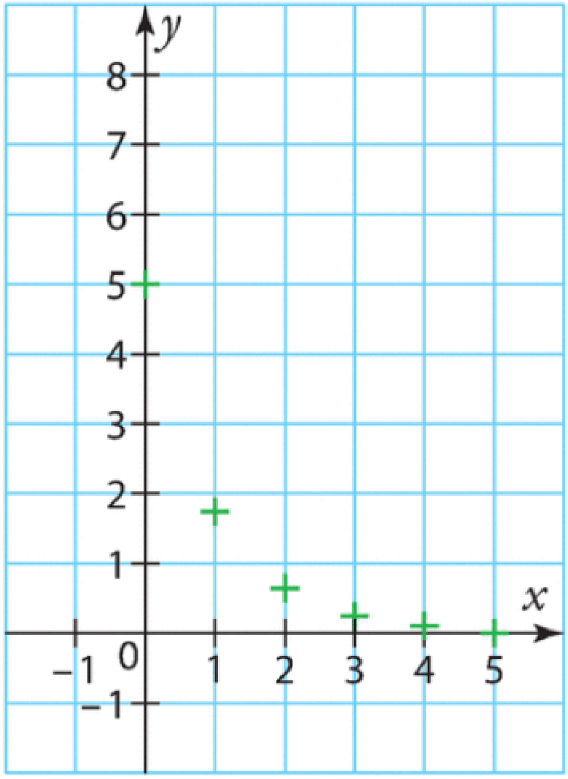
Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = 2$. On a donc

$$u_n = \frac{1}{2} \times 2^n.$$



Soit u la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = \frac{1}{3}$. On a donc

$$u_n = 5 \times \frac{1}{3^n}.$$



2.4 Sens de variation

Propriété 6

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q dont les termes sont strictement positifs.

— Si $q > 1$, alors la suite est strictement **croissante**.

— Si $q = 1$, alors la suite est **constante**.

— Si $0 < q < 1$, alors la suite est **décroissante**.

Remarque

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

— Si $q > 0$ mais que les termes de la suite (u_n) sont strictement négatifs, les sens de variations sont inversés par rapport à la propriété ci-dessus.

— Si $q = 0$, la suite est presque toujours nulle, excepté éventuellement pour u_0.

— Si $q < 0$, alors la suite n'est **pas monotone**.

2.5 Suite auxiliaire et suite arithmético-géométrique

Application 9

Un youtubeur compte 75 abonnés le 1er Janvier 2019. Il remarque que, chaque mois, il en perd 40% et 100 nouvelles personnes le suivent. On souhaite déterminer l'évolution de son nombre d'abonnés. On modélise la situation par une suite (u_n), où u_n est le nombre d'abonnés n mois après Janvier 2019.

1. Calculer le nombre d'abonnés au 1er Février 2019.
2. Justifier que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0{,}6u_n + 100$.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre de mois nécessaires pour dépasser les 230 abonnés.
4. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on note (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 250$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire la nature de la suite (v_n).
   (b) Exprimer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
   (c) Déterminer le nombre d'abonnés au 1er Décembre 2019.

3 Calculs de sommes

3.1 Propriétés générales

Notation 3

La **somme** des n termes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se note

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

Remarque

La lettre utilisée comme indice de sommation n'a pas d'importance : il s'agit d'une **variable « muette »**. On a donc

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Propriété 7

S'il n'y a pas d'indice de sommation dans la somme, c'est que le terme sommé est constant.

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ termes égaux à } 1} = n$$

Application 10

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{15} 1 =$ **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 =$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{15} 1 =$ **d)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 =$

Propriété 8

Soient $\{x_k\}_{1\leq k\leq n}$ et $\{y_k\}_{1\leq k\leq n}$ deux familles de n nombres réels et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda x_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

3.2 Somme des termes d'une suite arithmétique

Théorème 9
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul, on a alors

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Application 11
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} k$ **b)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{50} (2i+1)$ **c)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (nk+3)$

3.3 Somme des termes d'une suite géométrique

Théorème 10
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ un réel différent de 1, on a alors

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Application 12
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \left(3 \times 2^k\right)$ **b)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^k - 5\right)$

Application 13
Durant l'année 2020, un constructeur automobile a construit 15 000 voitures. Sa production augmente de 120 unités par an. On note u_n le nombre de voitures construites durant l'année $2020 + n$.

1. Donner u_0 et préciser la nature de la suite (u_n).
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer le nombre de voitures fabriquées par ce constructeur entre 2020 et 2030.
4. Compléter le programme Python suivant permettant de calculer le nombre total de voitures fabriquées par ce constructeur n années après 2020.

```python
def somme(n):
    u =             # A remplir
    S =             # A remplir
    for i in range(1, n+1):
        u =             # A remplir
        S =             # A remplir
    return            # A remplir
```

Application 14
Une entreprise décide de soutenir une association caritative par des dons mensuels. Le premier janvier 2021, l'entreprise fait un don de 150 euros et chaque mois, elle rajoute 10% de plus. On note u_n la valeur du don mensuel n mois après le premier janvier 2021. Quelle somme totale l'association aura-t-elle reçue de l'entreprise au bout de 1 an ?