Chapitre 1 : second degré

1 Fonctions polynômes du second degré

1.1 Forme développée et forme canonique

Définition 1 (Fonction polynôme du second degré)
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée **fonction polynôme du second degré** s'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ des réels avec $a \neq 0$ et tels que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Définition 2 (Forme développée et coefficients)
Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a,b,$c \in \mathbb{R}$ sont des réels et où $a \neq 0$. Lorsque la fonction f est écrite sous cette forme, on parle de **forme développée**. Les réels a, b, et c sont appelés les **coefficients** de f.

Exemple 1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

La fonction f est une fonction polynôme du second degré, donnée sous forme développée. Ses coefficients a, b, et c valent

$$a = 1 \qquad b = 2 \qquad c = 1.$$

On a par exemple $f(3) = 3^2 + 2 \times 3 + 1 = 9 + 6 + 1 = 16$.

Application 2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x + 2$.
1. La fonction f est-elle une fonction polynôme du second degré ?
2. Si oui, donner les coefficients a, b, et c de f.
3. Calculer $f(5)$.

Application 3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)(x + 1)$.
1. La fonction f est-elle une fonction polynôme du second degré ?
2. Si oui, donner les coefficients a, b, et c de f.
3. Calculer $f(-1)$.

Propriété 1

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors f peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta,$$

où on a $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$. Cette forme s'appelle la **forme canonique** de f.

Démonstration à connaître. □

Exemple 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 1$. La forme canonique de f est

$$f(x) = (x+1)^2.$$

En effet, on a dans ce cas $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1$, on obtient donc

$$\alpha = \frac{-2}{2 \times 1} = -1 \qquad \beta = f(-1) = (-1+1)^2 = 0.$$

Application 5

Donner la forme canonique de f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 10$.

1.2 Variations et représentation graphique

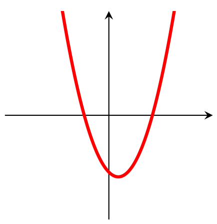
Propriété 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, de forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

Si $\mathbf{a > 0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

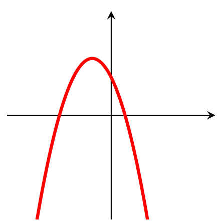
La fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, \alpha]$, strictement croissante sur $[\alpha, +\infty[$, et f admet comme minimum β en α.



Si $\mathbf{a < 0}$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha]$, strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$, et f admet comme maximum β en α.



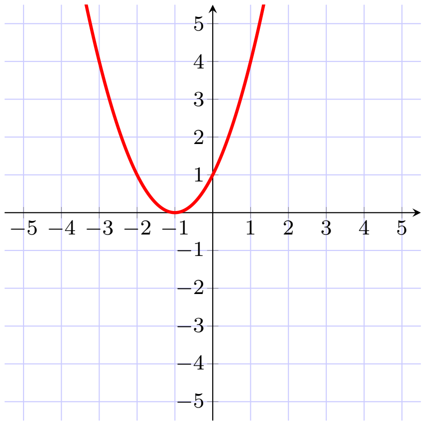
Définition 3 (Parabole)

La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est appelée une **parabole**.

Exemple 6

On reprend la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+2x+1$. On a vu que sa forme canonique était $f(x) = (x+1)^2$, c'est-à-dire que $a = 1$ donc $a > 0$, $\alpha = -1$ et $\beta = 0$. On en déduit que

- la fonction est strictement décroissante sur $]-\infty, -1]$;
- la fonction est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$;
- elle admet comme minimum 0 en -1.



Application 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 7$.

1. Donner la forme canonique de f.
2. En déduire le tableau de variations de f.

Propriété 3

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par sa forme canonique

$$f(x) = a(x - \alpha) + \beta.$$

Alors f est représentée par une parabole dont le sommet a pour coordonnées (α, β).

Exemple 8

La fonction définie par $f(x) = (x+1)^2$ de l'exemple précédent admet une parabole dont le sommet est le point $(-1, 0)$.

Application 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)^2 - 3$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f. Donner le sommet de la parabole $\mathscr{C}_f$.

2 Équations du second degré

2.1 Définitions

Définition 4 (Équation du second degré)

Une **équation du second degré** à coefficients réels est une équation de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ trois réels et $a \neq 0$.

Définition 5 (Racines d'une équation)

Les solutions de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées les **racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple 10

L'équation $2x^2 - x + 3 = 0$ est une équation du second degré avec $a = 2$, $b = -1$ et $c = 3$.

Application 11

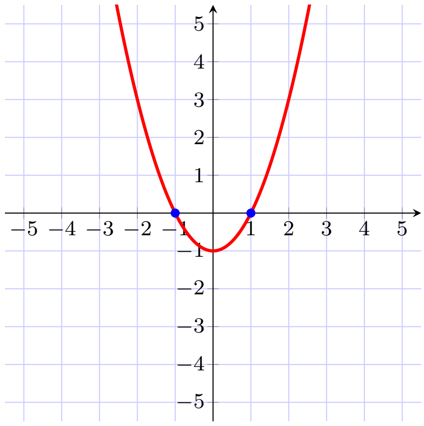
Déterminer les racines de l'équation $x^2 - 2 = 0$.

Remarque

Les racines de l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

correspondent aux abcisses des points où la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ passe par l'axe des abcisses. Ci-contre l'exemple de $x^2 - 1 = 0$.



Définition 6 (Racine d'une fonction polynôme)

Soit f la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On dit que la valeur x_0 est une **racine** de f si

$$f(x_0) = 0.$$

Exemple 12

Soit f la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 4$. On a $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$. Donc 2 est une racine de f.

Application 13

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + 6x + 9$.

1. Calculer $g(-3)$.
2. Donner une racine de g.

2.2 Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{R}$

On va maintenant apprendre à résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations du second degré, c'est-à-dire à trouver des solutions réelles à nos équations.

Définition 7 (Discriminant)

Le **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, noté Δ (delta majuscule), est le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Propriété 4

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

— Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

— Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

On dit que x_0 est **racine double** du trinôme.

— Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Démonstration à connaître. □

Exemple 14

Considérons l'équation du second degré $x^2 + 2x - 3 = 0$. On a ici $a = 1, b = 2, c = -3$. On commence par calculer le discriminant de cette équation, on obtient $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$. On est dans le cas où $\Delta > 0$ et on sait qu'on a ainsi deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2 + 4}{2} = 1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-2 - 4}{2} = -3.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\mathscr{S} = \{-3; 1\}$

Application 15

On considère l'équation $2x^2 + 3x - 1 = 0$.

1. Calculer le discriminant Δ associé à cette équation.
2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation.

3 Propriétés d'un trinôme $ax^2 + bx + c$

3.1 Factorisation

Propriété 5 (admise)

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

— Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ où x_1 et x_2 sont les racines de f.

— Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - x_0)^2$ où x_0 est la racine double de f.

— Si $\Delta < 0$, alors la fonction f ne peut pas s'écrire comme un produit de deux polynômes de degré 1.

Exemple 16

On a vu précédemment que la fonction f définie par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ avait pour discriminant $\Delta = 16$ et pour racines $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$. Cela signifie que l'on peut aussi écrire f sous la forme factorisée

$$f(x) = (x + 3)(x - 1).$$

Application 17

On considère l'expression $f(x) = x^2 + x - 6$.

1. Calculer le discriminant Δ associé à f.
2. En déduire les racines de f.
3. Écrire f sous sa forme factorisée.

3.2 Somme et produit de racines

Propriété 6 (admise)

Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, dont le discriminant est strictement positif. La fonction f a alors deux racines distinctes x_1 et x_2 et on a

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \qquad \text{et} \qquad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

3.3 Signe d'une fonction polynôme du second degré

Propriété 7 (admise)

Soit f une fonction du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, de discriminant Δ.

— Si $\Delta < 0$, alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est du signe de a.

— Si $\Delta = 0$, alors pour tout réel $x \neq \frac{-b}{2a}$, $f(x)$ est du signe de a, et $f(\frac{-b}{2a}) = 0$.

— Si $\Delta > 0$, alors on a les tableaux de signe suivants.

Si a > 0

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Si a < 0

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut retenir que dans ce cas, f est du signe de a, sauf entre ses racines.

Exemple 18

On peut reprendre la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

On a vu que le déterminant de f vaut 16 et que les deux racines de f sont données par $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$. On a ainsi le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Et, en effet, cela concorde avec la représentation graphique de f donnée ci-dessous.