Chapitre 2 : Probabilités conditionnelles

Utilisez le QR-code pour retrouver ce cours au format numérique, ainsi que d'autres ressources.

Notation 1

— On note Ω l'univers, c'est-à-dire l'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire.

— Un événement correspond à une partie des issues possibles de l'expérience, c'est un sous-ensemble de Ω.

— On note $P(A)$ la probabilité que l'événement A se réalise.

— On note $\overline{A}$ l'événement complémentaire de A.

— On note $A \cup B$ l'événement qui se réalise si l'événement A **ou** l'événement B se réalise, c'est-à-dire si au moins l'un des deux se réalise.

— On note $A \cap B$ l'événement qui se réalise si l'événement A **et** l'événement B se réalise, c'est-à-dire si les deux événements se réalisent simultanément.

1 Probabilités conditionnelles

Dans tout le chapitre, sauf indication contraire, A et B sont deux événements d'un univers Ω, tels que

$$P(A) \neq 0.$$

Définition 2 (Probabilité conditionnelle)

La **probabilité conditionnelle** que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé se note

$$P_A(B)$$

et est définie par

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple 1

Un sac contient quatre boules noires numérotées de 1 à 4 et notées N_1, N_2, N_3, N_4 ainsi que six boules blanches numérotées de 1 à 6 et notées $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$. On extrait au hasard une boule dans le sac. On a

$$\Omega = \{N_1, N_2, N_3, N_4, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}.$$

On note
- A l'événement « la boule tirée porte un numéro 3 » ;
- B l'événement « la boule est blanche ».

On a $A = \{N_3, B_3\}$, $B = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$, et $A \cap B = \{B_3\}$. On a ainsi $P(A) = \frac{2}{10} \neq 0$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. La probabilité d'extraire une boule blanche **sachant qu'**elle porte le numéro 3 est égale à

$$\begin{aligned} P_A(B) &= \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{10}} \\ &= \frac{1}{10} \times \frac{10}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Application 2

On jette un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6 et on s'intéresse au nombre obtenu. Quelle est la probabilité que le nombre obtenu soit un nombre premier sachant que le nombre obtenu est supérieur à 4 ?

Propriété 1

La probabilité $P_A(B)$ vérifie

$$0 \leq P_A(B) \leq 1 \text{ et } P_A(B) + P_A(\overline{B}) = 1.$$

Propriété 2

Si A et B sont deux événements de probabilité non nulle, alors

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B).$$

Exemple 3

Si $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}6$, et $P_A(B) = \frac{4}{7}$, alors

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}7 \times \frac{4}{7} = 0{,}4$$

puis

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}.$$

Remarque

La propriété 2 permet de passer de $P_A(B)$ à $P_B(A)$ (et inversement). On voit dans l'exemple 3 que ce n'est pas la même chose !

Application 4

Dans une classe de première, 55% des élèves sont des filles et 40% des élèves sont des filles demi-pensionnaires. On choisit un élève au hasard dans cette classe. Quelle est la probabilité qu'un élève soit demi-pensionnaire sachant que c'est une fille ?

1.1 Utilisation de tableaux

Notation 3

Les **tableaux à double entrée** permettent une présentation claires de certaines expériences aléatoires et facilitent le calcul des probabilités conditionnelles.

	B	$\overline{\mathbf{B}}$	**Total**
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{\mathbf{A}}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
Total	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

— $P(A \cap B)$ se lit à l'intersection de la ligne A et de la colonne B.

— $P(A)$ (respectivement $P(B)$) se lit sur la dernière colonne (respectivement la dernière ligne).

— $P_A(B)$ (ou $P_B(A)$) s'obtient en calculant le quotient des deux probabilités adéquates :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ et } P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple 5

Si $P(A) = 0{,}7$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}4$, on a alors le tableau suivant.

	B	$\overline{\mathbf{B}}$	**Total**
A	0,4	0,3	0,7
$\overline{\mathbf{A}}$	0,2	0,1	0,3
Total	0,6	0,4	1

Et on trouve donc

— $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}1$;

— $P_B(\overline{A}) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3}$;

— $P_{\overline{A}}(B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{2}{3}$;

Application 6

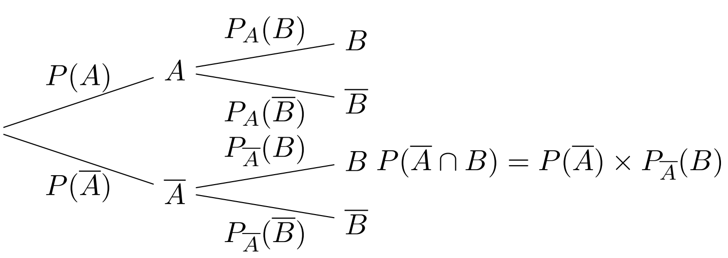
Un club sportif rassemble 180 membres répartis en deux catégories : juniors et seniors. On compte 135 seniors dont 81 hommes. Il y a 27 garçons parmi les juniors.
En choisissant une femme au hasard, calculer la probabilité d'avoir une juniore.

2 Formule des probabilités totales

2.1 Arbre pondéré

Définition 4 (Arbre pondéré)

Un **arbre pondéré**, ou **arbre de probabilité**, est un schéma mettant en jeu des probabilités conditionnelles et permettant de calculer rapidement des probabilités.



Propriété 3 (admise)

1. La somme des probabilités des branches issues d'un nœud est égale à 1.
2. La probabilité de l'événement à l'extrémité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches composant ce chemin.
3. La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des chemins conduisant à cet événement.

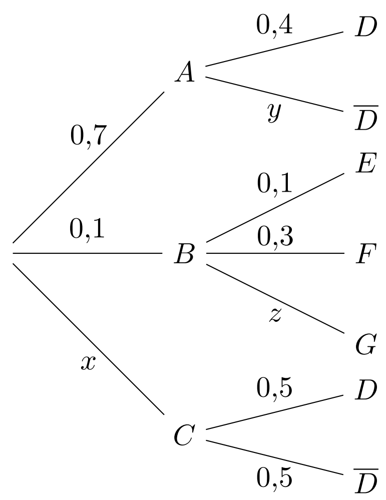
Exemple 7

On considère l'arbre pondéré ci-contre.

— La première propriété nous dit que $0{,}7 + 0{,}1 + x = 1$, d'où $x = 0{,}2$. De même $y = 0{,}6$ et $z = 0{,}6$.

— La deuxième propriété nous dit que $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}7 \times 0{,}4 = 0{,}28$.

— La troisième propriété nous dit que $P(D) = P(A \cap D) + P(C \cap D) = 0{,}7 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}38$.



Application 8

On considère une expérience aléatoire et deux événements A et B tels que $P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}7$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$.

1. Construire un arbre pondéré complet représentant cette expérience.
2. Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.

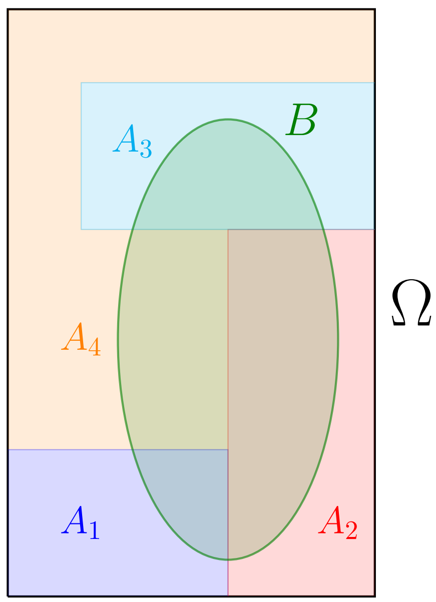
2.2 Probabilités totales

Définition 5 (Partition de l'univers)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul et $A_1, A_2, \ldots, A_k$ des événements non vides de Ω. Les événements $A_1, A_2, \ldots, A_k$ forment une **partition de l'univers** Ω si et seulement si

— ils sont deux à deux **incompatibles** : pour tous entiers distincts i et j entre 1 et k, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$;

— leur réunion forme tout l'univers : $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \Omega$.



Propriété 4 (Formule des probabilités totales)

On considère une expérience aléatoire d'univers Ω et un événement B. On note $A_1, \ldots, A_k$ k événements formant une partition de l'univers. Alors on a

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \cdots + P(A_k \cap B)$$

Remarque

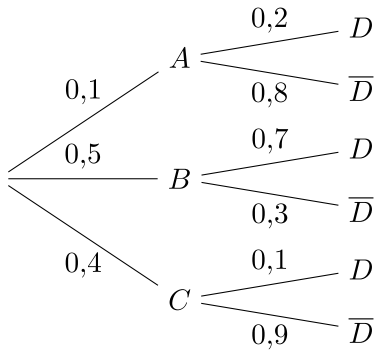
Un événement A et son complémentaire $\overline{A}$ forment toujours une partition de l'univers. On a donc

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B).$$

Exemple 9

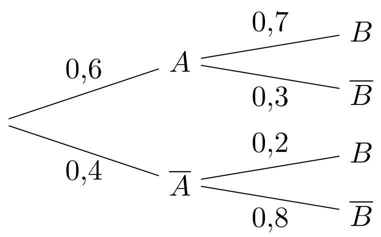
On considère l'arbre pondéré ci-contre. Les événements A, B et C forment une partition de l'univers Ω, ainsi

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) \\ &= P(A) \times P_A(D) + P(B) \times P_B(D) + P(C) \times P_C(D) \\ &= 0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}4 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}41 \end{aligned}$$



Application 10

On considère les événements A et B vérifiant l'arbre pondéré ci-contre.
Déterminer $P(B)$.



3 Indépendance

Définition 6 (Indépendance)
Soient A et B deux événements d'un univers Ω. On dit que A et B sont **indépendants** lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

Propriété 5
Soient A et B deux événements d'un univers Ω, tels que $P(A) \neq 0$. Alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Démonstration. C'est un résultat d'équivalence (“si et seulement si”). Commençons par le sens direct : si A et B sont indépendants alors $P_A(B) = P(B)$. Cela vient de la définition de $P_A(B)$. En effet $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Mais dans le cas de deux événements indépendants on a $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, donc

$$P_A(B) = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B).$$

L'autre sens (si $P_A(B) = P(B)$ alors A et B sont indépendants) vient aussi de la définition. On a $P_A(B) = P(B)$ donc $\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B)$, d'où finalement $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, et donc les événements A et B sont indépendants. $\square$

Remarque

L'intuition derrière la notion d'indépendance est que si deux événements sont indépendants, la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

Exemple 11

Soient A et B deux événements indépendants tels que $P(A) = 0{,}8$ et $P(B) = 0{,}35$. Danc ce cas, on a

$$P(A \cap B) = 0{,}8 \times 0{,}35 = 0{,}28.$$

Propriété 6 (admise)

Si A et B sont deux événements indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont aussi deux événements indépendants.

Application 12

On dispose d'une urne qui contient trois boules rouges numérotées $1, 2, 3$ ainsi que six boules noires numérotées $1, 1, 1, 2, 2$ et 3. Les boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard dans cette urne et on s'intéresse aux événements suivants :

— R : « Tirer une boule rouge. »

— P : « Tirer une boule dont le numéro est pair. »

— U : « Tirer une boule dont le numéro est 1. »

1. Montrer que les événements P et R sont indépendants.
2. Les événements R et U sont-ils indépendants ? Justifier.

4 Avec des inconnues

Application 13

Lorsqu'elle est exposée au virus de la grippe, une personne peut développer la grippe. Quand elle est vaccinée, la personne exposé ne développe pas la maladie avec une probabilité α. Le nombre α s'appelle l'efficacité du vaccin. De plus, on constate que, parmi les personnes exposées, 20% ne sont ni vaccinnées, ni malades. Cette année, la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinée est de 0,4.

1. Exprimer, en fonction de α, la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinnée et ne soit pas malade.
2. Exprimer, en fonction de α, la probabilité qu'une personne exposée soit vaccinée et malade.
3. Pour quelle valeur de α la proportion de personnes exposées qui ne sont pas malades est égale à 50% ?