

Chapitre 4 : Dérivation



1 Nombre dérivé et tangente

On considère f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et on note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère du plan. Soit a un réel appartenant à I et A le point de \mathcal{C}_f d'abscisse a .

1.1 Nombre dérivé et taux de variation

Soient $h \in \mathbb{R}$ un réel non nul tel que $a + h \in I$ et H le point de \mathcal{C}_f d'abscisse $a + h$. En particulier : $a \neq a + h$.

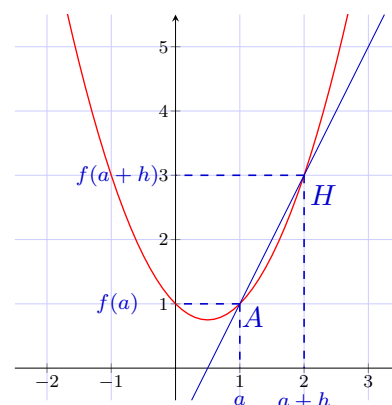
Définition 1 (Taux de variation)

Le nombre $\tau(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est appelé **taux de variation** de f entre a et $a + h$. Sur la figure ci-contre, le point A a pour coordonnées $(a; f(a))$ et le point H a pour coordonnées $(a + h; f(a + h))$.

Le coefficient directeur de la droite (AH) est

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a};$$

autrement dit, le coefficient directeur est $\tau(h)$. Le nombre $\tau(h)$ dépend de a .

**Remarque**

Le taux de variation est aussi appelé **taux d'accroissement** entre a et $a + h$.

Définition 2 (Nombre dérivée et dérivabilité)

On dit que f est **dérivable** en a lorsque $\tau(h)$ tend vers un nombre réel quand h prend des valeurs proches de 0. Ce réel est appelé **nombre dérivée** de f en a et est noté $f'(a)$. On écrit alors

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemple 1

Soit $f : x \mapsto 2x + 1$. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel quelconque. Alors $f(a) = 2a + 1$ et $f(a + h) = 2(a + h) + 1 = 2a + 2h + 1$. Ainsi, pour tout $h \neq 0$ et tout $a \in I$, on a

$$\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{2a + 2h + 1 - (2a + 1)}{h} = \frac{2h}{h} = 2.$$

On a ainsi $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 2$. On dit que la fonction f est dérivable au point a et que son nombre dérivé en a vaut $f'(a) = 2$.

Exemple 2

Soit $f : x \mapsto x^2$. Pour $h \neq 0$ et $a = 0$, $\tau(h) = \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h^2}{h} = h$. On a $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

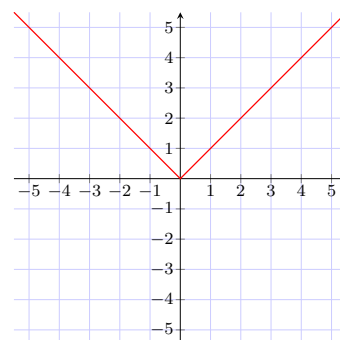
Pour $a = 1$, on a $\tau(h) = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2-1^2}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$. On a $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = 2$ donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Exemple 3

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = |x|$. Pour $h \neq 0$ et $a = 0$,

$$\tau(h) = \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Pour $h > 0$, $\tau(h) = \frac{h}{h} = 1$, et pour $h < 0$, $\tau(h) = \frac{-h}{h} = -1$. On obtient deux nombres différents quand h prend des valeurs proches de 0, donc g n'est pas dérivable en 0.

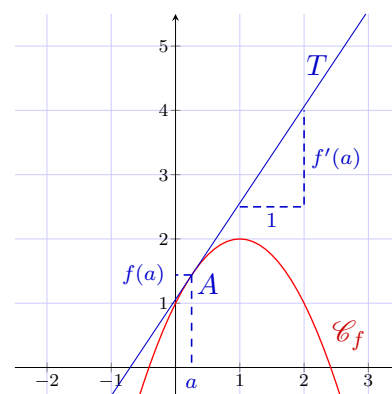
**Application 4**

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -\frac{1}{3}x + 1$.

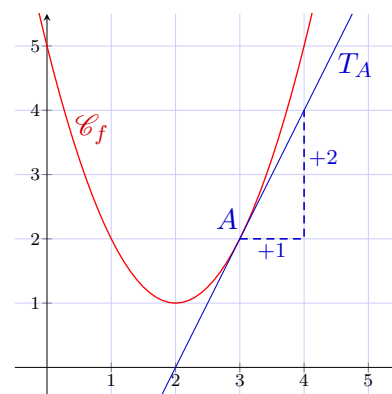
1. Soit h un réel non nul. Calculer $f(3+h)$ et $f(3)$.
2. Montrer que f est dérivable en 3 et déterminer le nombre dérivé de f en 3.

1.2 Tangente à une courbe**Définition 3 (Tangente)**

Lorsque f est dérivable en a , on appelle **tangente** à la courbe \mathcal{C}_f au point d'abscisse a la droite T passant par $A(a; f(a))$ dont le coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(a)$.

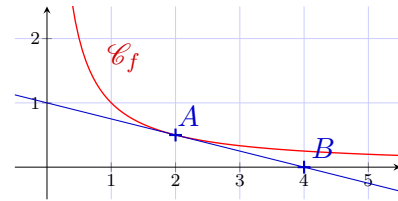
**Exemple 5**

On donne la courbe d'une fonction f dérivable en 3, dont on a tracé la tangente T_A au point d'abscisse 3. Par lecture graphique, on a $f'(3) = 2$.



Application 6

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ dont on a tracé la courbe représentative \mathcal{C}_f . La droite (AB) est la tangente à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 2. Déterminer graphiquement $f'(2)$.

**2 Équation de tangente****Propriété 1**

Soit f une fonction dérivable en a . L'équation réduite de la tangente T_A à la courbe de f au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Démonstration. Soit T_A la tangente au point A d'abscisse a de \mathcal{C}_f . Par définition, le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente, et elle a donc pour équation

$$y = f'(a)x + p,$$

où le nombre p est l'ordonnée à l'origine et reste à déterminer. Comme le point $A(a; f(a))$ appartient à T_A , ses coordonnées vérifient l'équation réduite de T_A . On a donc

$$f(a) = f'(a) \times a + p \iff p = f(a) - f'(a) \times a.$$

En remplaçant cette valeur dans l'équation réduite de T_A et en factorisant par $f'(a)$, on a bien

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

□

Exemple 7

Soit f une fonction telle que $f(1) = 2$ et $f'(1) = \frac{1}{3}$. La tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1 a donc pour équation réduite

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1).$$

Cela donne

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}(x - 1) + 2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 2 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Application 8

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. En remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$:

1. déterminer la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 ;
2. en déduire les coordonnées du point d'intersection de T avec l'axe des ordonnées.

3 Fonctions dérivées

Définition 4 (Fonction dérivée)

On dit que f est **dérivable sur un intervalle** I lorsque f est dérivable en tout réel a de I . On appelle **fonction dérivée** de f la fonction qui, à tout réel x de I , associe le réel $f'(x)$. On la note f' .

3.1 Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Propriété 2

Fonction f définie par :	Ensemble de définition D_f	Fonction dérivée f' définie par :	Ensemble de dérivabilité $D_{f'}$
$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}
$f(x) = mx + p$ avec $m, p \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}	$f'(x) = m$	\mathbb{R}
$f(x) = x^2$	\mathbb{R}	$f'(x) = 2x$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	\mathbb{R}	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

Exemple 9

La fonction g est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$. La fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \neq 0$, on a

$$g'(x) = -\frac{2}{x^{2+1}} = -\frac{2}{x^3}.$$

Exemple 10

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x + 5$.
Alors

$$f'(x) = 4.$$

Exemple 11

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.
Alors

$$f'(x) = 3x^2.$$

Exemple 12

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^5$.
Alors

$$f'(x) = 5x^4.$$

Exemple 13

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^{2007}$.
Alors

$$f'(x) = 2007x^{2006}.$$

Application 14

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = 9x + 12.$$

1. Donner l'ensemble de dérivabilité de f .
2. Donner l'expression de la dérivée f' .

Application 15

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^7.$$

1. Donner l'ensemble de dérivabilité de f .
2. Donner l'expression de la dérivée f' .

Remarque

Attention, la fonction racine carrée n'est pas dérivable sur tout son ensemble de définition ! Elle est définie sur $[0; +\infty[$ mais elle est dérivable sur $]0; +\infty[$. Autrement dit, elle n'est pas dérivable en 0.

3.2 Opérations sur les fonctions dérivées

Propriété 3

Soient u, v et g des fonctions définies et dérivables sur un intervalle I . Soient k, a et b des réels.

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée
Dérivée d'une somme	$u + v$	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée d'un produit par une constante	$k \times u$	$(k \times u)' = k \times u'$
Dérivée d'un produit	$u \times v$	$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$
Dérivée d'un inverse	$\frac{1}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$
Dérivée d'un quotient	$\frac{u}{v}$ avec $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
Dérivée de $f(x) = g(ax + b)$: soit J l'intervalle tel que pour tout $x \in J$, $ax + b \in I$. La fonction f est définie et dérivable sur J et $f'(x) = a \times g'(ax + b)$.		

Exemple 16

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 1$. En tant que fonction polynôme, f est dérivable sur \mathbb{R} , et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 12x^2 - 10x + 2.$$

Exemple 17

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $g(x) = \frac{4+x^2}{x+1}$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ en tant que fonction rationnelle, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a

$$g'(x) = \frac{2x(x+1) - (4+x^2) \times 1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - 4}{(x+1)^2}.$$

Application 18

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

Donner l'ensemble de dérivabilité et la fonction dérivée de la fonction f .

Application 19

Soit f la fonction définie sur I par $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$.

- Déterminer l'ensemble I .
- Justifier que f est dérivable en précisant l'ensemble de dérivabilité et déterminer sa fonction dérivée.