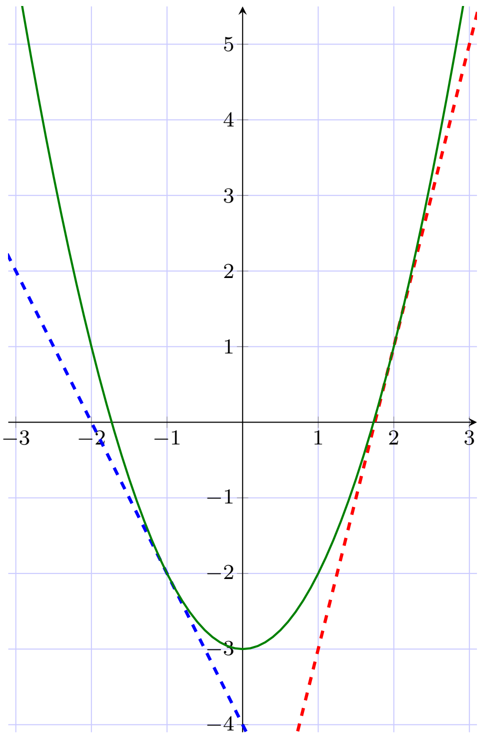
Chapitre 7 : Applications de la dérivation

Soit I un intervalle et f une fonction dérivable sur I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère.

1 Dérivée et sens de variation

Théorème 1

- Si f est **croissante** sur I, alors, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geq 0$.
- Si f est **décroissante** sur I, alors, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leq 0$.
- Si f est **constante** sur I, alors, pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$.



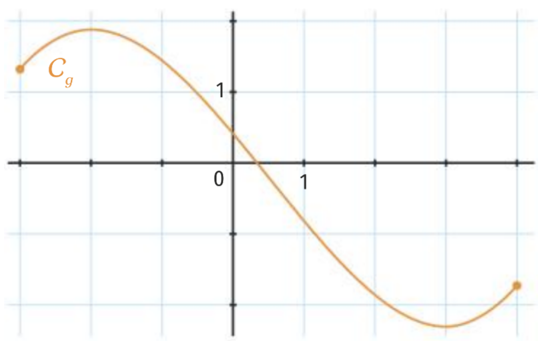
Exemple 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$, dont la courbe $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-contre.

- La fonction est décroissante sur $]-\infty; 0]$, donc en chaque point de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur cet intervalle, la pente de la tangente est **négative**.
- La fonction est croissante sur $[0; +\infty[$, donc en chaque point de la courbe $\mathscr{C}_f$ sur cet intervalle, la pente de la tangente est **positive**.

Application 2

Soit $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative d'une fonction g définie et dérivable sur $[-3; 4]$.
Donner graphiquement, suivant les valeurs de x, le signe de $g'(x)$.



Théorème 2 (admis)

- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$, alors f est **croissante** sur I.
- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$, alors f est **décroissante** sur I.
- Si, pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est **constante** sur I.

Exemple 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. La fonction f est un polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

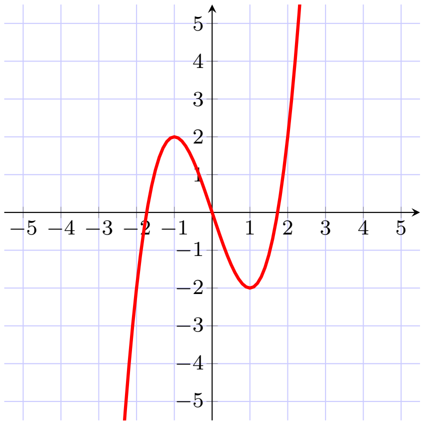
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3 \\ &= 3(x^2 - 1) \\ &= 3(x-1)(x+1). \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Puis, en utilisant le Théorème 2, on en déduit le tableau de variation suivant.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	



Application 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 - 2x + 5$.

1. Calculer la dérivée de f.
2. Donner le signe de f'.
3. Donner le tableau de variations de f.

2 Extremums d'une fonction

2.1 Extremum local

Définition 1 (Extremum local)

Soient I un intervalle ouvert et $c \in I$. On considère une fonction f définie sur I. On dit que $f(c)$ est un **maximum local** (respectivement **minimum local**) de f au voisinage de c si et seulement si il existe deux réels a et b dans I tels que $c \in]a;b[$ et, pour tout réel $x \in]a;b[$, $f(x) \leq f(c)$ (respectivement $f(x) \geq f(c)$).
Un **extremum local** est un maximum ou un mimumum local.

Exemple 5

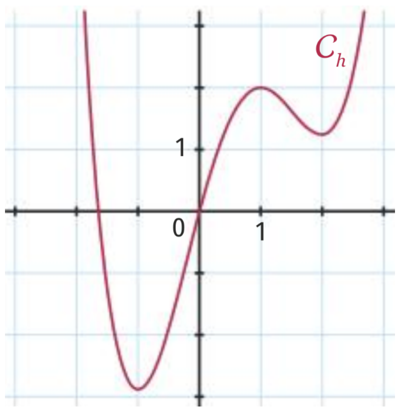
Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont on donne la courbe représentative ci-contre.

— Le nombre $h(2)$ est un minimum local de h.

— Le nombre $h(1) = 2$ est un maximum local de h.

— Le nombre $h(-1)$ est un autre minimum local de h, il est aussi le minimum global de la fonction h.

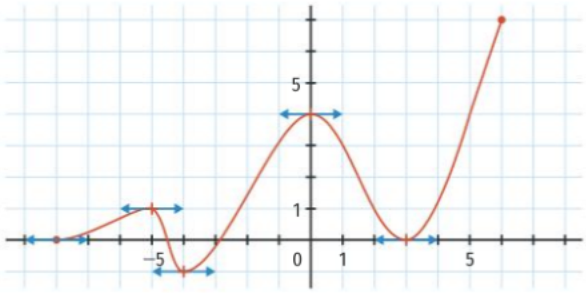
— Il ne semble pas y avoir de maximum global.



Application 6

La courbe ci-contre représente une fonction h définie sur $[-8; 6]$.

1. Quel est le maximum local de h sur $[-8; -4]$?
2. Quel est le minimum local de h sur $[-8; 0]$?
3. Quel est le maximum de h sur $[-8; 6]$?
4. Quel est le minimum de h au voisinage de 3 ?



2.2 Lien avec la dérivation

Propriété 3 (admise)

Soient I un intervalle ouvert, f une fonction dérivable sur I et c un réel de I.

— Si $f(c)$ est un extremum local de f, alors $f'(c) = 0$.

— Si f' s'annule en c **en changeant de signe**, alors $f(c)$ est un extremum local de f.

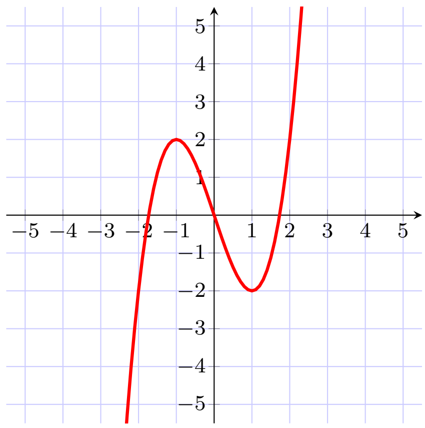
Remarque

Attention, la condition de changement de signe est importante. Par exemple la fonction $f : x \mapsto x^3$ a une dérivée qui s'annule en 0 mais n'admet pas d'extremum local en 0.

Exemple 7

On reprend l'exemple de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$ vu précédemment, dont on a donné le tableau de variation ci-dessous et la représentation graphique ci-contre.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	



On voit que $f'(-1) = f'(1) = 0$, et que la dérivée change de signe aux points -1 et 1. On en conclut que f admet deux extremum locaux.

Application 8

On pose $f : x \mapsto \dfrac{3-x}{x-2}$.

1. Donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f.
2. Dériver f sur son ensemble de dérivabilité.
3. Faire le tableau de signe de f' et en déduire le tableau de variations de f.
4. La fonction f admet-elle des extremums locaux ?