Exercices : Généralités sur les suites

Exercice 1.
Soit les suites $(u_n), (v_n)$ et (w_n) définie par

$$u_n = n^2 - 2n + 1, v_n = \frac{n-3}{n+1}, w_n = \sqrt{n^2+n} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Calculer les quatre premiers termes de ces trois suites.

Exercice 2.
Soit la suite (v_n) définie par $v_n = 2n^2 + n + 2$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite.

2. Déterminer v_{n+1} en fonction de v_n pour tout entier naturel n.

3. Exprimer $v_{n+1} - v_n$ en fonction de n.

Exercice 3.
Soit la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \sqrt{3 + w_n}$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer les termes w_1, w_2 et w_3.

2. Trouver la fonction f telle que $w_{n+1} = f(w_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.
Soit la suite (a_n) définie $a_n = \dfrac{2n-3}{n^2+3}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite a.

2. Calculer a_{100}.

3. Exprimer a_{2n} en fonction de n.

4. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite éventuelle de la suite (t_n).

Exercice 5 (, factorielle).**
Soit la suite (t_n) définie par la relation de récurrence suivante : $t_{n+1} = (n+1) \times t_n$, avec $t_0 = 1$.

1. Calculer t_1, t_2, t_3 et t_4.

2. Montrer que la suite t_n est croissante.

3. Exprimer t_n en fonction de n.

4. A l'aide de la calculatrice, conjecturer la limite éventuelle de la suite (t_n).

Exercice 6.

1. Pour chacune des suites suivantes définies par récurrences, calculer les trois prochains termes.

a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3(u_n)^2$.

b) $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$.

c) $b_0 = 0$ et $b_{n+1} = (b_n)^2 + b_n + 3$.

d) $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = 2^{w_n}$.

2. Pour chacune des suites précédentes, déterminer u_n en fonction de u_{n-1}.

Exercice 7 (*).
Montrer que la suite v définie par $v_n = \sqrt{n}$ est croissante.

Exercice 8.
Soit u la suite définie par $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{5}{2}(u_n)^2$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Remplir le script Python suivant.
Il prend en argument un entier naturel n et renvoie le terme u_n de la suite.

```
def suite_u(n):
    u=...     # Remplir
    for i in range(1,..):    # Remplir
        u=.......            # Remplir

    return(u)
```

Exercice 9.
Soit u la suite définie par $u_{n+1} = n - 3u_n$.

1. Remplir le script Python ci-dessous.
Il prend en argument un entier naturel n et renvoie le terme u_n de la suite.

2. Que renvoie l'instruction suite u(3) ?

```
def suite_u(n):
    u=0
    for i in range(1,..):       # Remplir
        u=.......               # Remplir

    return(u)
```

Exercice 10 (*).

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 0; \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 2.$$
Déterminer les quatre premiers termes de la suite.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$v_n = n(n+1).$$

a) Calculer les quatres premiers termes de la suite (v_n). Que remarquez-vous ?

b) Déterminer v_{n+1} en fonction de v_n.

3. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont égales.

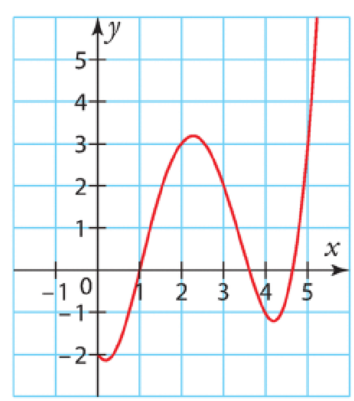
Exercice 11 (**).
On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$$u_0 = 2; \quad u_{n+1} = u_n + 3n^2 + 3n - 2.$$

1. Développer, réduire **puis** factoriser l'expression :
$$A(n) = (n+2)(n-1)^2 + 3n^2 + 3n - 2$$

2. En déduire que la suite (u_n) admet pour forme explicite :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+2)(n-1)^2.$$

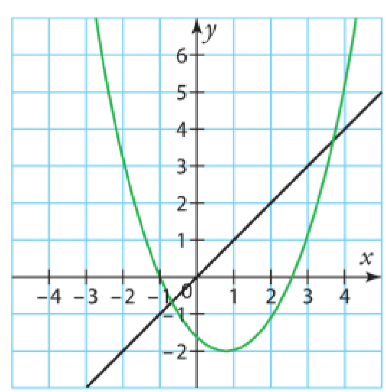
Exercice 12.
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$u_n = f(n).$$
On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f.

Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).



Exercice 13.
On a représenté graphiquement une fonction f et la droite d'équation $y = x$.
Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = -2$ et $v_{n+1} = f(v_n)$.

Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (v_n).



Exercice 14.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 9$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Tracer un repère orthonormée ainsi que la courbe représentative de la fonction racine carrée.

2. Tracer également la courbe représentative de la fonction $f(x) = x$.

3. Sur ce même repère, représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite.

Exercice 15.
En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, étudier les variations des suites (u_n), définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $u_n = n^2 + 2n + 3$.

b) $u_n = \dfrac{2}{n+1}$.

c) $u_n = -5^n$.

Exercice 16.
En comparant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, étudier les variations des suites (u_n), définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) $u_n = 7 \times 0.5^n$

b) $u_n = 4 \times 9^n$

c) $u_n = \dfrac{5}{n+3}$

Exercice 17.
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{2^n}{n}.$$

1. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

2. Résoudre l'inéquation $\dfrac{2n}{n+1} > 1$.

3. En déduire les variations de la suite (u_n).

Exercice 18.
Étudier les variations des suites ci-dessous.

1. (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n}$.

2. (v_n) définie par $v_0 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_{n+1} = \dfrac{3}{v_n}$.

3. (w_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $w_n = \dfrac{3^n}{n}$.

4. (t_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $t_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 19.
On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_n = 2^n - 1.$$

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 1$.
On veut montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales.

1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite.

2. Montrer que, pour tout entier n, on a $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

3. Conclure.

Exercice 20.
Conjecturer la limite des suites ci-dessous.

1. la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^3$.

2. la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

3. (*) La suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 3w_n$.

4. (*) La suite (z_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $z_n = (-2)^n$.

5. La suite (t_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par $t_n = (\dfrac{-1}{3})^n$.

Exercice 21.
Une entreprise d'impression de photos propose un abonnement annuel à ses clients qui coûte 45 euros. Avec cet abonnement, le client paye 5 centimes par photo qu'il veut imprimer.
On note u_n le prix que paye le client pour l'abonnement et l'impression de n photos.

1. Exprimer u_n en fonction de n.

2. Combien le client paye-t-il pour imprimer 15 photos ?

3. S'il a payé 98 euros, combien de photos a-t-il imprimées ?

Les exercices suivants sont hors-programme, n'hésitez pas à venir me voir en cas de difficulté !

Exercice 22 (*).
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_0 = 3,\ u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{2}.$$

$$v_0 = 1,\ v_{n+1} = \frac{3v_n + u_n}{3}.$$

1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite.

2. On admet que les termes u_n et v_n sont strictement positifs pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que (u_n) et (v_n) sont strictement croissantes.

Exercice 23 (**).
On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 0;\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$v_n = \frac{n}{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer les quatre premiers termes de chaque suite.

2. Quelle conjecture peut-on faire à propos des suites (u_n) et (v_n) ? A propos d'une éventuelle limite ?

3. Simplifier l'expression $A(n) = v_{n+1} \times (2 - v_n)$.

4. Justifier que les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales.

Exercice 24 (***).
Pour tout entier $n \geq 1$, on note u_n la somme des n premiers carrés, c'est-à-dire $u_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite u.

2. Déterminer une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.

3. On pose w la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$w_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

a. Montrer que $u_1 = w_1$.

b. Vérifier que la suite w vérifie la même relation de récurrence que u. Conclure.