Exercices : Polynômes du second degré

Exercice 1.

1. Développer les expressions suivantes :

a) $A = (x+1)^2$ b) $B = (2x-5)^2$ c) $C = (x-3)(x+3)$

2. Factoriser les expressions suivantes :

a) $D = y^2 - 2$ b) $E = t^2 + 6t + 9$ c) $F = 4z^2 - 9$

3. Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2 = 36$ b) $t^2 = 0$ c) $w^2 = -4$ d) $z^2 = 5$

Exercice 2.
Préciser si la fonction définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme du second degré. Si oui, identifier les coefficients a, b, c dans l'expression $ax^2 + bx + c$.

a) $f(x) = x(x+3) - (x+2)$ b) $g(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$ c) $h(x) = (x+1)(x-1)$
d) $k(x) = (2x+1)^2 - 4x^2$ e) $m(x) = 7x(x-4) + (x-7)$ f) (*) $q(x) = (x+1)^3 - x^3$

Exercice 3.
Mettre sous forme canonique les fonctions polynômes du second degré suivantes :

a) $f(t) = t^2 - 4t + 1$ b) $g(x) = x^2 + 6x + 3$ c) $h(x) = x^2 - 2x + 5$
d) $j(x) = x^2 - 10x + 5$ e) $k(x) = 2x^2 + 12x - 4$ f) $l(x) = 3x^2 + 30x + 12$

Exercice 4.

1. a) Factoriser l'expression $A = x^2 + 10x$

b) A l'aide de la factorisation précédente, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 10x = 0$.

2. L'objectif de cette partie est de résoudre l'équation $x^2 + 4x + 3 = 0$.

a) Compléter l'égalité suivante avec deux réels

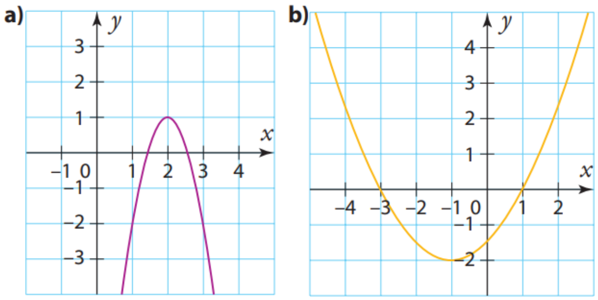
$$x^2 + 4x + \cdots = (x + \dots)^2.$$

b) A l'aide de la question précédente, compléter l'égalité suivante avec deux réels

$$x^2 + 4x + 3 = (x + \dots)^2 + \dots$$

c) En se ramenant à un produit nul grâce à la factorisation, résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 4x + 3 = 0$.

36 Pour chaque fonction représentée ci-dessous, déterminer les coordonnées du sommet, l'axe de symétrie et le signe de *a*.



Exercice 5.

Pour les fonctions polynômes du second degré suivantes, déterminer la forme canonique de la fonction, ainsi que le minimum ou le maximum de la fonction.

Dresser ensuite le tableau de variations.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

2. $g(x) = x^2 + 5x + 4$.

Exercice 6.

1. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 4x^2 + 2x + 1$.

a) Dresser le tableau de variations de h

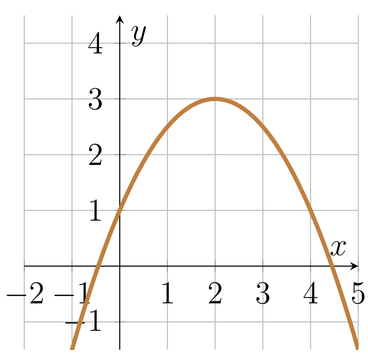
b) Justifier que h ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4x^2 + 4x - 1$.

a) Dresser le tableau de variations de g

b) Justifier que g s'annule en une unique valeur que l'on précisera.

Exercice 7.



A l'aide de la représentation graphique suivante :

1. Déterminer la forme canonique de la fonction f polynôme du second degré représentée ci-contre.

2. En déduire la forme développée de la fonction f.

Exercice 8.

La quantité de sucre $q(x)$ (en kg) présente dans 100kg de betteraves sucrières est donnée par

$$q(x) = -0,004x^2 + x - 40$$

où x est la masse (en kg) d'engrais répandue à l'hectare, avec $x \in [60; 180]$.

1. Montrer que pour tout $x \in [60; 180]$:

$$q(x) = -0,004(x - 125)^2 + 22,5.$$

2. En déduire, à l'aide du tableau de variations de q, la masse x d'engrais répandue à l'hectare pour que la quantité du sucre soit maximale.

Exercice 9.
On considère le polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par

$$P(x) = x^2 + 6x - 7.$$

1. Déterminer la forme canonique de P.

2. A l'aide de cette dernière, déterminer les racines du polynôme P.

3. Déterminer le tableau de variations de P.

Exercice 10.

1. Déterminer le discriminant de chacun des polynômes suivants :

a) $2x^2 + 5x + 1$ b) $-x^2 + 7x + 3$ c) $x^2 - 5x + 4$

d) $2x^2 - 4x - 1$ e) $-x^2 - x - 1$ f) $x^2 + 7$

2. En déduire les racines éventuelles des différents polynômes.

Exercice 11.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^2 - 2x - 2$$

1. Déterminer le tableau de variations de la fonction f.

2. A l'aide de la forme canonique, déterminer la forme factorisée de f.

3. En déduire les antécédents de 0 par la fonction f.

Exercice 12.
Pour chacune des fonctions suivantes, résoudre l'équation $f(x) = 0$:

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$. b) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x + \dfrac{1}{3}$.

c) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x + 1$.

Exercice 13 (Polynôme de degré trois, (**)).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. On veut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1. Vérifier que 1 est solution de l'équation $f(x) = 0$.

2. Montrer que l'on peut écrire f sous la forme $f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$, en développant cette expression et en identifiant les coefficients a, b, c.

3. Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

4. En déduire toute les solutions de l'équation $f(x) = 0$ et écrire f sous forme factorisée.

5. Regarder la méthode de Cardan sur internet, elle permet de trouver les racines d'un polynôme de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Exercice 14 (Polynôme de degré 4, (**)).
1) Factoriser l'expression $2X^2 - 4X + 2$.
2) En déduire une factorisation du polynôme $2x^4 - 4x^2 + 2$.

Exercice 15.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 6x - 4$

a) Dresser le tableau de signes de f

b) Résoudre l'équation $f(x) \leq 0$.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$

a) Dresser le tableau de signes de g

b) Résoudre l'équation $g(x) > 0$.

Exercice 16.
Résoudre les inéquations suivantes :

a) $5x^2 + 15x + 10 < 0$.

b) $2x^2 - 8x + 8 \leq 0$.

c) $2x^2 < -5x + 10$.

Exercice 17.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$.

1. Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) = 2(x+1)^2 - 18$.

2. Vérifier que pour tout réel x, on a $f(x) = 2(x+4)(x-2)$.

3. Choisir la forme la plus adaptée de f pour répondre aux questions suivantes :

a) Dresser le tableau de variations de f.

b) Résoudre $f(x) = 0$.

c) Résoudre $f(x) = -16$.

d) Résoudre $f(x) \geq 0$.

Exercice 18 (Position relative de courbes, (*)).
On veut étudier la position relative de deux paraboles. On considère les fonctions f et g définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 5x - 20$ et $g(x) = x^2 - 2x - 2,5$.

1. A l'aide de la calculatrice, conjecturer les éventuels points d'intersection des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ainsi que leur position relative.

2. Démontrer cette conjecture en étudiant la fonction polynôme du second degré h définie par $h(x) = f(x) - g(x)$.

Exercice 19 (Factorisation de $x^n - 1$, (**)).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n - 1$ où $n \geq 2$.

1. Dans le cas $n = 2$, factoriser $f(x)$ où $x \in \mathbb{R}$.

2. Dans le cas $n = 3$, montrer que $f(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$, en développant et en identifiant les coefficients a, b et c.

3. Dans le cas $n = 4$:

a) Factoriser une première fois $f(x)$ à l'aide d'une identité remarquable.

b) Factoriser une seconde fois $f(x)$.

c) Montrer que $f(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)$.

4. Dans le cas général :

a) Calculer $f(1)$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$.

Problèmes :

1. Trouver deux entiers dont la somme est égale à 40 et le produit à 375.
2. Grégoire, 10 ans, veut délimiter dans son jardin un enclos rectangulaire pour son lapin nain. Son père lui donne $18m$ de grillage.

   a) Déterminer les dimensions de cet enclos rectangulaire qui donnent une aire maximale.

   b) Quelle est alors la valeur de cette aire ?

3. Un joueur de tennis frappe dans une balle avant qu'elle touche le sol. La trajectoire de la balle est alors définie par la parabole d'équation $y = -0.03x^2 + 0.3x + 0.75$, où x correspond à la distance entre le joueur de tennis et la balle, et y correspond à la hauteur de la balle.

   (a) Le filet se trouve à 5 m du joueur, et la hauteur du filet est de 1 m. La balle passe-t-elle au-dessus du filet ? Justifier.

   (b) Déterminer à quelle distance du joueur la balle est retombée par terre. On donnera une valeur arrondie au centième. Justifier.

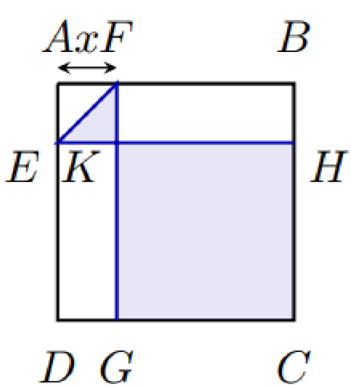
   (c) À quelle(s) distance(s) du joueur la balle a-t-elle une hauteur supérieure ou égale à 1,02 m ? Justifier.

4. La figure ci-contre représente le logo d'une entreprise. Le quadrilatère ABCD est un carré de côté 4 cm. Les quadrilatères AFKE et KHCG sont aussi des carrés. Le créateur du logo souhaite que l'aire de la surface en bleu soit la plus petite possible.

   (a) Déterminer en fonction de x l'aire de la surface bleue.

   (b) Déterminer la forme canonique de fonction aire.

   (c) En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire en bleu soit la plus petite possible, ainsi que la valeur de cette aire.



Exercice 20.
On veut étudier la position relative d'une parabole d'équation $y = 2x^2–3x + 5$ et d'une droite d'équation $y = 5x–3$.

1. Déterminer à l'aide la calculatrice, le ou les points d'intersection de la droite et de la parabole.

2. On pose $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ et $g(x) = 5x - 3$.

a) Ecrire une relation à l'aide des fonctions f et g sur les ordonnées des points d'intersection.

b) Pour tout réel x, on pose $h(x) = f(x) - g(x)$. Calculer $h(x)$ pour tout réel x.

c) Dresser le tableau de signes de la fonction h.

d) En déduire la position relative de la parabole et de la droite.

Exercice 21.
On souhaite résoudre l'inéquation

$$\frac{t^2 + 4t - 3}{t - 1} > 0$$

1. Déterminer les racines du polynôme $f(t) = t^2 + 4t - 3$.

2. Dresser le tableau de signe de $f(t)$ et de $g(t) = t - 1$.

3. En déduire l'ensemble de solutions de l'inéquation.

Exercice 22.
Déterminer deux entiers consécutifs dont la somme des carrés est égale à 4141.

Exercice 23.

1. Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$. f admet pour extremum 2 atteint en $x = –1$. De plus, f s'annule en $x = 1$.
Déterminer la forme canonique de f.

2. Soit g une fonction polynôme de degré 2. La courbe représentative de g a pour sommet le point $A(1; 3)$ et passe par le point $B(0; 5)$.
Déterminer la forme canonique de g.

Exercice 24.
François décide d'aménager sa piscine, qui a une forme carrée et qui mesure x mètres de côté. Il veut acheter une bâche de sécurité, qui coûte 20 € par m^2.
Il veut installer une clôture faisant tout le tour de sa piscine, à une distance de deux mètres de la piscine. Le prix est 100 par mètre de clôture.
Enfin il veut acheter une échelle de piscine qui coûte 150€.
On note $f(x)$ le prix total que François va payer.

1. Montrer que $f(x) = 20x^2 + 400x + 1750$.

2. Combien payera-t-il si la piscine mesure 5 mètres de côté ?

3. Quelle est la taille de la piscine si il paye 8155 euros ?

Correction :

Exercice 21

1. On calcule $\Delta = 4^2 - 4 \times (-3) = 28$. On en déduit que les racines sont :

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{28}}{2} = -2-\sqrt{7} \textbf{ et } x_2 = \frac{-4+\sqrt{28}}{2} = -2+\sqrt{7}.$$

2. On en déduit que le tableau de signes de f est :

t	$-\infty$		$-2-\sqrt{7}$		$-2+\sqrt{7}$		$+\infty$
$f(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

et celui de g :

t	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(t)$		$-$	0	$+$	

En particulier en "mixant" les deux tableaux de signes, on a :

t	$-\infty$		$-2-\sqrt{7}$		$-2+\sqrt{7}$		1		$+\infty$
$\frac{f(t)}{g(t)}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

3. En "lisant" le tableau de signes, on en déduit que $\mathcal{S} =]-2-\sqrt{7}; -2+\sqrt{7}[\bigcup]1;+\infty[$.

Exercice 22

Traduisons l'énoncé en maths (c'est l'étape la plus compliquée) :
deux entiers consécutifs dont la somme des carrés est égale à 4141 c'est trouver n et $n+1$ tels que

$$n^2 + (n+1)^2 = 4141 \Longleftrightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 - 4141 = 0 \Longleftrightarrow 2n^2 + 2n + 4140 = 0.$$

On se retrouve avec un polynôme du second degré, dont il suffit de déterminer les racines, en espérant qu'une d'elles soit entière. Après un calcul, on trouve que $n = 45$ est une solution, on en déduit que $(45, 46)$ est une solution de ce problème.

Exercice 23

Rappel : forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
1. On en déduit que $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.
Il reste à déterminer le coefficient a.
Or d'après l'énoncé, $f(1) = 0$ et $f(1) = a(1-(-1))^2 + 2 = 4a + 2$. On a alors

$$4a + 2 = 0 \Longleftrightarrow 4a = -2 \Longleftrightarrow a = \frac{-2}{4} = -1/2.$$

La forme canonique de f est alors $f(x) = \frac{-1}{2}(x+1)^2 + 2$.
2. On en déduit que $\alpha = 1$ et $\beta = 3$. Il reste à déterminer a.
Or d'après l'énoncé, on a $g(0) = 5$. Or $g(0) = a(0-1)^2 + 3 = a + 3$
On a alors :

$$5 = a + 3 \Longleftrightarrow 2 = a.$$

La forme canonique de g est alors $g(x) = 2(x-1)^2 + 3$