Exercices : Probabilités conditionnelles

Exercice 1.
On considère un dé truqué à 6 faces. L'expérience aléatoire consiste à lancer le dé et à considérer la valeur de la face supérieure du dé.
Pour k un entier compris entre 1 et 6, on considère l'évènement F_k définit par "la valeur obtenue est k".
Pour seule information sur le dé, on a :

A	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
$p(A)$	$0,11$	$0,07$		$0,2$	$0,15$	
- La probabilité d'obtenir un nombre pair vaut $0,4$.

Compléter le tableau en expliquant votre démarche.

Exercice 2.
Soit A et B deux évènements d'une expérience aléatoire.

1. On suppose que $p(A) = 0,12$, $p(\overline{B}) = 0,70$ et $p(A \cap B) = 0,05$.

a) Déterminer $p(B)$.

b) Déterminer $p(A \cap B)$.

2. On suppose que $p(A) = \dfrac{1}{4}$, $p(B) = \dfrac{3}{5}$ et $p(A \cup B) = \dfrac{7}{10}$. Calculer $p(A \cap B)$.

Exercice 3.
Dans un établissement scolaire, 60 élèves participent à la journée découverte sportives : 45 se sont inscrits au taekwondo et 24 au judo.
Sachant que 6 d'entre eux ne se sont inscrits à aucune de ces activités, déterminer la probabilité qu'un jeune rencontré au hasard dans le centre pratique aujourd'hui :

a) le taekwondo ; b) le judo ; c) aucun des deux sports ;
d) le taekwondo ou le judo ; e) le taekwondo et le judo

Exercice 4.
On considère deux événements A et B tels que $p(A) = 0,2$ et $p_A(B) = 0,8$ et $p(B) = 0,30$.

1. Calculer $p(A \cap B)$.

2. Calculer $p(A \cup B)$.

3. Calculer $p_B(A)$.

Exercice 5.
On considère une expérience aléatoire dont l'univers associé est Ω et un événement A de Ω.
Écrire plus simplement $p_\Omega(A)$.

Exercice 6.
On lance une pièce truquée de sorte que la probabilité d'obtenir Pile est $0,75$.
Si le résultat est Pile, on tire une boule dans une urne contenant 3 boules vertes et 2 boules jaunes ; si le résultat est Face, on tire une boule dans une urne contenant 1 boule verte et 5 boules jaunes.

Représenter la situation associée à cette expérience aléatoire par un arbre pondéré après avoir nommé et énoncé les événements y apparaissant.

Exercice 7.
Dans une forêt, il y a 30% d'épicéas et 70% de sapins. Un parasite infecte 10% des arbres. Les épicéas représentent 20% des arbres touchés.

1. Faire un tableau pour résumer l'ensemble de la situation.

2. Quelle est la probabilité qu'un épicéa soit touché par le parasite ?

Exercice 8.
Une urne opaque contient trois boules rouges, une boule noire et une boule verte, toutes indiscernables au toucher. On procède au tirage, sans remise, de trois boules dont on note la couleur.
Déterminer la probabilité d'obtenir trois boules de couleurs différentes.

Exercice 9 (Créer une partition (*)).
On considère deux événements A et B disjoints d'un univers Ω.

Décrire un évènement C en fonction de A, B et des symboles d'intersection, d'union ou de contraire de sorte que A, B et C forment une partition de Ω.
(Un dessin peut être utile)

Exercice 10.
Un jeu est organisé à partir d'un sac contenant 6 jetons rouges et 4 jetons noirs. Les jetons sont indiscernables au toucher.
Un joueur prend deux jetons au hasard dans le sac selon le déroulé suivant :

- le joueur prend un premier jeton au hasard dans le sac et il met le jeton de côté ;
- le joueur prend un second jeton au hasard dans le sac et il met le jeton de côté.

On note R_1 : « le premier jeton tiré est de couleur noir. » et R_2 : « le second jeton tiré est de couleur noir. »

1. Dresser l'arbre de probabilités lié à ce jeu.

2. On considère l'événement A « le joueur obtient deux jetons de couleur rouge. ».

a) Déterminer $p(A)$.

b) Décrire par une phrase l'évènement contraire de A.

3. Montrer que la probabilité que le second jeton tiré soit de couleur rouge est égale à 0,6.

4. Le second jeton tiré est de couleur noire. Que peut-on alors penser de l'affirmation suivante : « il y a plus de 50 % de chance que le premier jeton tiré ait été de couleur rouge » ? Justifier la réponse.

Exercice 11 (Bayésianisme).
Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 1000.

Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 90%. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 1%.

1. Vous vous sentez nauséeux et vous pensez avoir attrapé la dite maladie. Vous décidez de vous faire tester. Malheureusement, ce dernier est **positif**.
Intuitivement et sans calcul, à combien de % vous estimez vous malade ?

2. Résumer la situation de l'énoncé par un arbre de probabilités.

3. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade, sachant que son test est positif.

4. Qu'en conclure par rapport à la question 1. ?

Exercice 12.
Un restaurant propose à sa carte deux desserts différents :

- le premier dessert est un assortiment de macarons, et est choisi par 40% des clients,
- le second dessert est une part de tarte, et est choisie par 30% des clients.

Les autres clients ne prennent pas de dessert, aucun client ne prend plusieurs desserts.
Le restaurateur a remarqué que parmi les clients ayant pris comme dessert un assortiment de macarons, 70% prennent un café, que parmi les clients ayant pris comme dessert une part de tarte, 40% prennent un café et que parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90% prennent un café.

On interroge au hasard un client de ce restaurant.

On note :

a) M l'évènement : « Le client prend un assortiment de macarons. »

b) T l'évènement : « Le client prend une part de tarte. »

c) N l'évènement : « Le client ne prend pas de dessert. »

d) C l'évènement : « Le client prend un café. »

1. Construire un arbre de probabilités décrivant la situation.

2. Définir par une phrase les probabilités $p(T \cap C)$ et $p_C(M)$. (on ne demande pas de les calculer).

3. Calculer $p(T \cap C)$ et $p(C)$.

4. On rencontre un client ayant pris un café. Quelle est la probabilité qu'il ait pris une part de tarte ? On donnera le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

5. Les évènements C et T sont-ils indépendants ?

Exercice 13.
Soit A et B deux évènements d'un même univers Ω tels que :

$$p(A) = 0,3 \text{ et } p(A \cup B) = 0,35.$$

Déterminer la probabilité de l'évènement B.

Exercice 14 (Probabilités et second degré).
Un forain souhaite créer un jeu où les participants ont 5% de chance de gagner. Pour cela, il dispose d'une urne contenant 40 boules dont n sont bleues (où $n \in \mathbb{N}$).

Le participant gagne s'il tire une boule bleue. Si au premier essai, la boule tirée n'est pas bleue, il ne remet pas la boule dans l'urne et **retire** une seconde boule.

On note B_1 : « la première boule tirée est bleue. » et B_2 : « la deuxième boule tirée est bleue. ».

1. Déterminer en fonction de n la probabilité de B_1.

2. Déterminer en fonction de n la probabilité de tirer une boule bleue au deuxième tirage sachant que l'on a pas tiré de boule bleue au premier tirage.

3. Dresser l'arbre de probabilités associé à cette expérience.

4. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

5. On note $p(G)$ la probabilité de gagner.

   a) Montrer que $p(G) = \dfrac{79n - n^2}{1560}$.

   b) On rappelle que le forain souhaite que $p(G) = 0,05$. Grâce à la formule précédente, déterminer le nombre de boules n nécessaire.

Exercice 15.
Soit A un évènement d'une expérience aléatoire. On suppose que l'évènement A est indépendant de lui-même. Montrer que $p(A)$ est nécessairement égale à 0 ou à 1.

Exercice 16.
On considère deux événements A et B tels que $p(A) = \dfrac{5}{12}$, $p(B) = \dfrac{3}{10}$ et $p(A \cap B) = \dfrac{1}{8}$.
Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 17.
Dans une population il y a 80% de droitiers et 45% de myopes. Parmi les myopes, $\dfrac{1}{5}$ ne sont pas droitiers.

On tire au sort une personne dans cette population.
Les événements D : « obtenir une personne droitière » et M : « obtenir une personne myope » sont-ils indépendants ?

Exercice 18.
Quand on lance deux fois de manière indépendante une pièce non équilibrée, la probabilité d'obtenir 1 fois Pile et 1 fois Face est 0,4.

1. Si la pièce était équilibrée, quelle serait la probabilité d'obtenir 1 fois Pile et 1 fois Face ?

2. Déterminer la probabilité d'obtenir Pile quand on lance cette pièce.