Exercices : Dérivation

Exercice 1.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$. Soit h un réel non-nul.

1. Déterminer le taux de variation $\tau(h)$ de f entre 2 et $2 + h$.

2. En déduire que la fonction f est dérivable en $x = 2$ et donner la valeur de $f'(2)$.

3. Refaire les questions précédentes avec la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 4x$.

Exercice 2.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2$. Soit h un réel non-nul.

1. Déterminer le taux de variation $\tau(h)$ de g entre 1 et $1 + h$.

2. En déduire que la fonction g est dérivable en $x = 1$ et donner la valeur de $g'(1)$.

3. Refaire les questions précédentes avec la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x - 2$.

Exercice 3.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - x$. Soit h un réel non-nul.

1. Déterminer le taux de variation $\tau(h)$ de g entre -1 et $-1 + h$.

2. En déduire que la fonction g est dérivable en $x = -1$ et donner la valeur de $g'(-1)$.

Exercice 4.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. Soit h un réel non-nul.

1. Montrer que pour tous réels a et b, on a $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. Déterminer le taux de variation $\tau(h)$ de f entre 3 et $3 + h$.

3. En déduire que la fonction f est dérivable en $x = 3$ et donner la valeur de $g'(3)$.

Exercice 5.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et h un nombre réel non nul.

On sait que $\dfrac{f(-7 + h) - f(-7)}{h} = \dfrac{5}{3}(4h + 9)$.

Peut-on dire que la fonction f est dérivable en -7 ? Si oui, déterminer $f'(-7)$.

Exercice 6.
Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et h un nombre réel non nul.

On sait que $\dfrac{g(4 + h) - g(4)}{h} = \dfrac{-2}{h}$.

Peut-on dire que la fonction g est dérivable en 4 ? Si oui, déterminer $g'(4)$.

Exercice 7 (*).
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{2}{x}$.

1. Déterminer le taux de variation $\tau(h)$ de f entre 4 et $4 + h$.

2. En déduire que la fonction f est dérivable en $x = 4$ et donner la valeur de $f'(4)$.

Exercice 8.
On considère une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-3; 3]$ dont on donne le tableau de valeurs suivant.

x	-3	-1	0	1	3
$f(x)$	0	-2	-1	2	-0
$f'(x)$	-1	0	2	0	-3

Donner l'allure possible d'une courbe représentative de la fonction f.

Exercice 9 (*).
Soit $f : x \mapsto \sqrt{x} - 1$ et $h \neq 0$.

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

2. A l'aide d'une identité remarquable, factoriser l'expression $9 - (9 + h)$ où $9 + h \geq 0$.

3. Calculer le taux de variation $\tau(h)$ de la fonction f entre 9 et $9 + h$.

4. En déduire que la fonction f est dérivable en $x = 9$ et que $f'(9) = \frac{1}{6}$.

Exercice 10 (*).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$.

1. Montrer que la fonction f peut s'écrire $f(x) = (x - 1)(x^2 + 1)$.

2. Déterminer le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$.

3. En déduire que la fonction f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 2$.

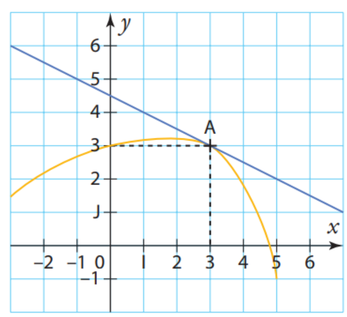
Exercice 11.

La courbe d'une fonction g définie sur $[-3; 5]$ est représentée ci-contre. La tangente à cette courbe au point A d'abscisse 3 passe par le point $B(-3; 6)$.

1. Déterminer $g(3)$ graphiquement.

2. Déterminer $g'(3)$ graphiquement.

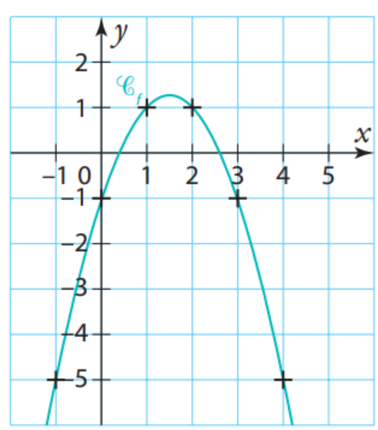
3. En déduire l'équation réduite de la tangente T de g passant par l'abscisse 3.



Exercice 12.

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(2) = -1$, $f'(1) = 1$ et $f'(0) = -2$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère ci-contre.

Tracer les tangentes de la fonction f des abscisses $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.



Exercice 13.
Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f : x \mapsto 2\sqrt{x}$. On admet que la fonction f est dérivable en $x = 4$ et en $x = 5$, avec $f'(4) = \dfrac{1}{2}$ et $f'(5) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

1. Déterminer l'équation de la tangente à f en l'abscisse $x = 4$.

2. Déterminer l'équation de la tangente à f en l'abscisse $x = 5$.

Exercice 14 (Dérivée de la fonction inverse).
Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Soit $a > 0$ et h un réel tel que $a + h > 0$.

1. Déterminer l'expression de $f(a+h) - f(a)$ en fonction de h.

2. En déduire l'expression du taux de variation $\tau_a(h)$ de la fonction inverse entre a et $a + h$.

3. Grâce à l'expression obtenue précédemment, montrer que la fonction inverse est dérivable en $x = a$, de dérivée égale à $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

4. En déduire que la fonction inverse est dérivable sur $]0;+\infty[$ et déterminer l'expression de sa dérivée.

5. Les calculs changent-ils si l'on se place sur $]-\infty;0[$?

Exercice 15.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto -5x + 4$.

1. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de la fonction f ainsi que l'expression de sa dérivée.

2. Déterminer l'équation de la tangente de f en $x = 4$.

3. Que remarquez-vous ?

Exercice 16.
Pour chacune des fonctions suivantes, dire sur quel ensemble elle est définie **et** dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

a) $f : x \mapsto x^4$
b) $g : x \mapsto x^{2023}$
c) $h : x \mapsto x^{-1}$
d) $j : x \mapsto x^{-3}$
e) $k : x \mapsto \sqrt{x}$
f) $l : x \mapsto \dfrac{1}{x^{2023}}$

Exercice 17.
Pour chacune des fonctions suivantes, dire sur quel ensemble elle est définie **et** dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

a) $f : x \mapsto -2x$
b) $g : x \mapsto 3x^{10}$
c) $h : x \mapsto 2x^{-1}$
d) $j : x \mapsto 7x^{-3}$
e) $k : x \mapsto 4\sqrt{x}$
f) $l : x \mapsto \dfrac{-0,4}{x}$

Exercice 18.

1. Déterminer l'expression de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto -2x + 7$
b) $g : x \mapsto 3x + 4$

2. En déduire la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (-2x + 7)(3x + 4)$

3. Développer l'expression de la fonction h, puis dériver cette expression. Que remarque t-on ?

4. Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction k définie par $k(x) = (x^3 + x^2)(x^5 + 2)$.

Exercice 19.
Chacune des fonctions suivantes est de la forme d'un produit de deux fonctions $u \times v$.

1. Dans chaque cas, identifier les fonctions u et v, et donner leurs ensembles de dérivabilité.

2. En déduire sur quel ensemble la fonction « produit » est dérivable, puis déterminer l'expression de sa fonction dérivée.

a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}(x^7 + x^4)$ b) $g : x \mapsto x^2\sqrt{x}$ c) $h : x \mapsto (x^2 + x + 1)(3x + 2)$

Exercice 20.
Soit f la fonction définie sur $]4; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x - 8}$.

1. Montrer que la fonction f est de la forme $\dfrac{1}{v}$ et donner l'expression de la fonction v.

2. Résoudre l'équation $v(x) = 0$.

3. Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction f.

Exercice 21.
Soit g la fonction définie sur $] - 1; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{2x + 4}{3x + 3}$.

1. Montrer que la fonction g est de la forme $\dfrac{u}{v}$ et donner l'expression des fonctions u et v.

2. Résoudre l'équation $v(x) = 0$.

3. Déterminer l'expression de la dérivée de la fonction g.

Exercice 22.
Soit h la fonction définie sur $]3; +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{3x - 9}$.

1. Montrer que la fonction h est de la forme $g(ax + b)$ et donner l'expression de la fonction g.

2. Déterminer la dérivée de la fonction g trouvée précédemment.

3. En déduire l'expression de la dérivée de la fonction h.

Exercice 23.
Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer sa « forme » générale (somme, produit, quotient, composition), puis en déduire sur quel ensemble elle est dérivable et sa fonction dérivée f'.

a) $f : x \mapsto \dfrac{3}{x} + \sqrt{x}$ b) $g : x \mapsto x^2(5x - 9)$ c) $h : x \mapsto \dfrac{x - 7}{2x + 11}$ d) $k : x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 4}$

Exercice 24.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$, dont la fonction dérivée f' est donnée par $f'(x) = 6x + 7$ où $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer une expression possible de $f(x)$ et en déduire la valeur des coefficients a et b.

2. Sachant que la courbe représentative de f passe par le point $A(1; 6)$, déduire la valeur de c.

Exercice 25.
Déterminer pour chacune des fonctions suivantes, l'ensemble I sur lequel elle est dérivable, puis sa fonction dérivée sur I.

a) $f(x) = \dfrac{5}{2x} - 4 + \dfrac{3x^2}{2}$ b) $g(x) = \dfrac{-2}{x^2 + x + 1}$ c) $h(x) = \dfrac{9x}{x^2 - 6x + 5}$ d) $k(x) = \sqrt{5 - 10x}$