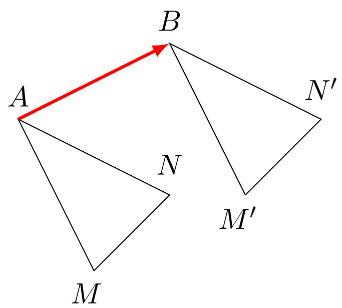
Chapitre 6 : Vecteurs

1 Translation et vecteurs

1.1 Vecteur associé à une translation

Définition 1 (Translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$)
On considère deux points A et B du plan. La **translation** qui transforme A en B est appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{AB}$.



Remarque
Si les ponts A et B sont **confondus**, on parle alors de **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$.

Notation 2
Si $A \neq B$, on représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par une **flèche d'origine** A **et d'extrêmité** B.

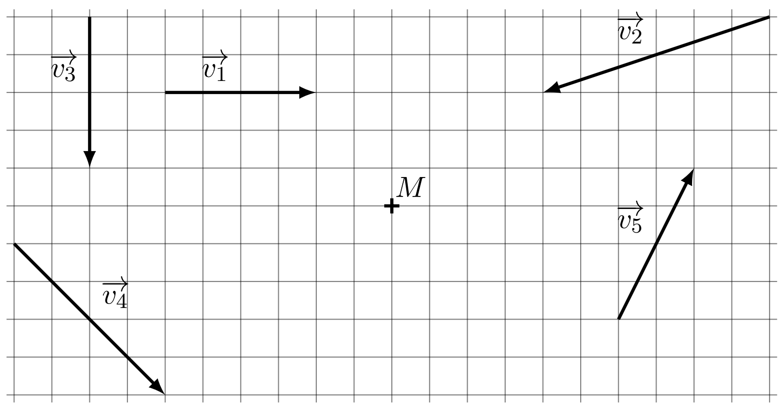
Application 1

Construire, à l'aide du quadrillage, les points

$$M_1, M_2, M_3, M_4, M_5,$$

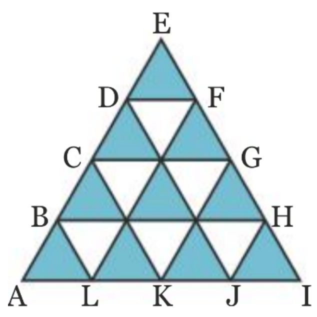
images respectives de M par les translations de vecteurs

$$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}, \overrightarrow{v_5}.$$



Application 2
On considère la figure suivante composée de triangles équilatéraux. Compléter les pointillés.

1. Le point D a pour image le point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{G\ldots}$.
2. Le point E a pour image le point ... par la translation de vecteur $\overrightarrow{DJ}$.
3. Le point ... a pour image le point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{FL}$.



1.2 Caractéristiques d'un vecteur

Définition 3 (Caractéristiques d'un vecteur)

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par

— **sa direction** : celle de la droite (AB) ;

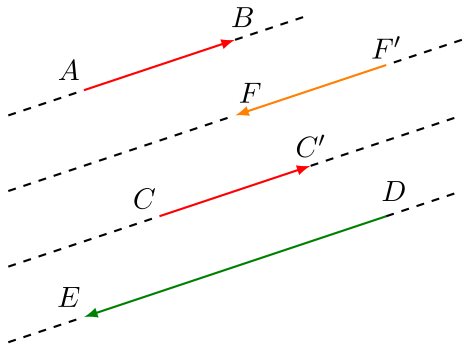
— **son sens** : de A vers B ;

— **sa norme** : la longueur du segment $[AB]$.

Application 3

Sur la figure ci-contre, on a représenté les points A, B, C, C', D, E, F et F', placés sur des droites parallèles.

1. Citer les vecteurs ayant le même sens.
2. Citer les vecteurs ayant la même norme.
3. Citer les vecteurs ayant la même direction.
4. Donner l'image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.



Notation 4

La **norme** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ se note $||\overrightarrow{AB}||$.

1.3 Égalité de vecteurs

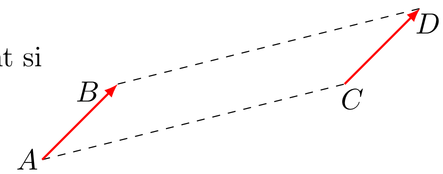
Définition 5 (Égalité de vecteurs)

Deux vecteurs sont dits **égaux** s'ils ont la même direction, le même sens, et la même longueur.

Propriété 1

Le quadrilatère $ABCD$ est un **parallélogramme** si et seulement si

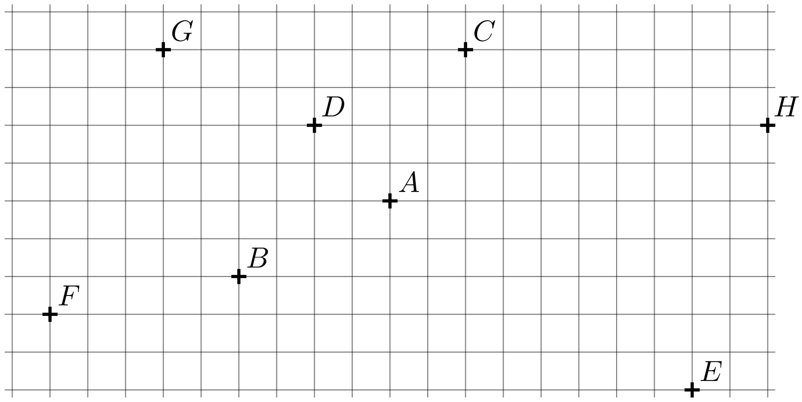
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$



Application 4

On place ci-contre les points A, B, C, D, E, F, G, H dans un repère.

1. Le quadrilatère $ABDC$ est-il un parallélogramme ?
2. Le quadrilatère $EFGH$ est-il un parallélogramme ?



Remarque

Attention ! Le sens des lettres dans la propriété précédente ($ABDC$) n'est pas le sens habituel ($ABCD$).

Remarque

Le parallélogramme peut éventuellement être aplati, c'est-à-dire que tous ses points soient alignés sur une même droite. La propriété reste vraie.

1.4 Vecteurs opposés

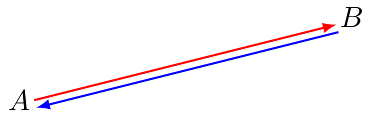
Définition 6 (Vecteur opposé)

Le **vecteur opposé** au vecteur $\overrightarrow{u}$, noté $-\overrightarrow{u}$, est le vecteur qui possède la même direction et la même norme que le vecteur $\overrightarrow{u}$, mais qui a un sens opposé.

Propriété 2

L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$. On a donc

$$-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}.$$



2 Propriétés des vecteurs

2.1 Milieu et vecteur

Propriété 3

Pour tous points du plan A et B, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ si et seulement si M est le milieu de $[AB]$.

Application 5

Soient $A(2;5)$, $M(6;7)$ et $B(10;9)$.

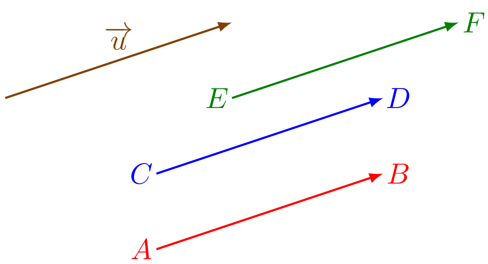
1. Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{MB}$.
2. Le point M est-il le milieu de $[AB]$?
3. Calculer les coordonnées du point C tel que B soit le milieu de $[AC]$.

2.2 Représentant d'un vecteur

Définition 7 (Représentant)

Lorsque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, alors on dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont des représentants d'un même vecteur que l'on peut également noter avec une seule lettre minuscule $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, ..., indépendamment des deux points. On note alors

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}.$$



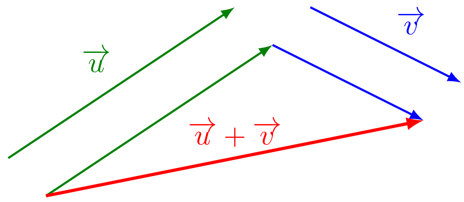
Remarque

Un vecteur admet une **infinité** de représentants.

2.3 Sommes de vecteurs

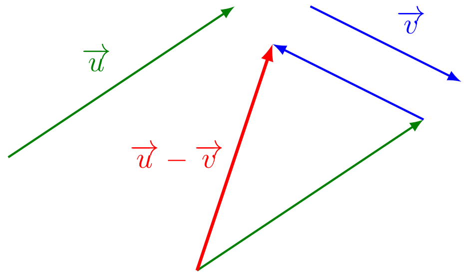
Définition 8 (Somme de vecteurs)

La **somme** de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et le vecteur $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ associé à la translation obtenue par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ suivie de la transalation de vecteur $\overrightarrow{v}$.



Définition 9 (Différence de vecteurs)

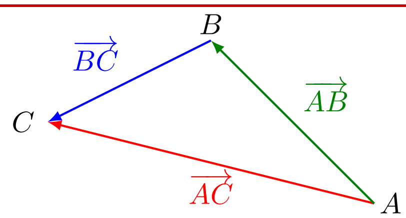
La **différence** de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}=\overrightarrow{u}+(-\overrightarrow{v})$. Cela signifie que soustraire un vecteur revient à additionner son opposé.



Propriété 4 (Relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C du plan, on a

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$$



Propriété 5 (Propriété du parallélogramme)

Pour tous points A, B et C du plan, on a

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$$

si, et seulement si, $ABDC$ est un parallélogramme.

Application 6

Soit A, B, C, D des points du plan.

1. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$.
2. Simplifier le vecteur $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$.

3 Vecteurs dans un repère

Définition 10 (Coordonnées d'un vecteur)

Dans un repère $(0; I, J)$, les **coordonnées du vecteur** $\overrightarrow{u}$ sont les coordonnées de l'unique point M tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{u}$.

Propriété 6

Dans si repère, si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$. On écrit aussi $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A)$.

Application 7

Soit $A(1;2)$, $B(2,-2)$ et $C(-3,0)$ trois points d'un repère du plan $(O;I,J)$.

1. Faire une figure et y placer les points A, B, C.
2. Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ ainsi que le représentant d'origine O de ce vecteur.
3. Donner les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$ ainsi que le représentant d'origine O de ce vecteur.

Propriété 7

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

Application 8

Soient $A(-3;1)$, $B(2;2)$, $C(4;5)$ et $D(9;6)$. Le quadrilatère $ABDC$ est-il un parallélogramme ?

3.1 Coordonnées d'une somme

Propriété 8

Soient $\overrightarrow{r}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{s}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs d'un repère du plan. Les coordonnées de $\overrightarrow{r}+\overrightarrow{s}$ sont alors $\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}$.

Application 9

Soient $A(1;1)$, $B(-2;3)$, $C(4;-1)$.

1. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ grâce aux coordonnées.
3. Quelle égalité retrouve-t-on ?

3.2 Produit d'un vecteur par un réel

Définition 11 (Produit d'un vecteur par un réel)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel et $\overrightarrow{u}$ un vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$. Le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$.

Propriété 9

Soient $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ deux nombres réels, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ deux vecteurs. On a

1. $\lambda\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}\right)=\lambda\overrightarrow{u}+\lambda\overrightarrow{w}$ **2.** $\left(\lambda+\lambda'\right)\overrightarrow{u}=\lambda\overrightarrow{u}+\lambda'\overrightarrow{u}$ **3.** $\lambda\left(\lambda'\overrightarrow{u}\right)=\left(\lambda\lambda'\right)\overrightarrow{u}$

Application 10

Soit deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ données par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$.

1. Calculer $2\overrightarrow{u}$ et $3\overrightarrow{v}$.
2. Calculer le vecteur $\overrightarrow{w}$ donné par $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}-3\overrightarrow{u}$.
3. Soit $A(-7;1)$. Déterminer les coordonnées du point M tel que $AM=\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$.