Chapitre 8 : Probabilités

1 Expérience aléatoire

1.1 Vocabulaire des probabilités

Définition 1 (Expérience aléatoire)
Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer lequel sera réalisé.

Définition 2 (Issue)
Une **issue** est un des résultats possibles d'une expérience aléatoire.

Définition 3 (Univers)
L'**univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes ses issues possibles.

Exemple 1
On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on observe le résultat obtenu. Cette expérience aléatoire a 6 issues possibles et l'univers associé est

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

Exemple 2
On tire une carte parmi un jeu de 32 cartes et on observe sa couleur (coeur, carreau, trèfle, ou pique). Cette expérience a 4 issues possibles et l'univers associé est

$$\Omega = \{\heartsuit; \diamondsuit; \clubsuit; \spadesuit\}.$$

Application 3
On lance une pièce de monnaie et on regarde si on tombe sur pile ou face.

1. Quelles sont les issues de cette expérience aléatoire ?
2. Déterminer l'univers Ω.

Application 4
Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. Parmi ces boules, 5 sont rouges, 3 sont bleues et 2 sont vertes. Dans chaque cas, déterminer l'univers associé à l'expérience aléatoire décrite.

1. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa valeur.
2. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa couleur.

1.2 Loi de probabilité

Définition 4 (Loi de probabilité)

Définir une **loi de probabilité** pour une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ consiste à attribuer à chacune des issues un nombre p_i positif ou nul, appelé **probabilité**, tel que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1.$$

Remarque

Lorsque toutes les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont égales, on parle d'**équiprobabilité**.

Notation 5

Si on a une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{x_1; \dots; x_n\}$, on note alors

$$P(\{x_i\})$$

la probabilité associée à l'issue x_i, pour n'importe quel entier i compris entre 1 et n.

Exemple 5

On lance une pièce de monnaie équilibrée. On est dans une situation d'équiprobabilité. On obtient donc la loi de probabilité suivante :

$$P(\{\text{face}\}) = P(\{\text{pile}\}) = \frac{1}{2}.$$

Application 6

On lance un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Donner la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

2 Événements d'une expérience aléatoire

2.1 Vocabulaire des événements

Définition 6 (Événement)

Un **événement** A est un ensemble d'issues : c'est une partie de l'univers Ω. Un événement $A = \{x\}$ qui contient une seule issue x est appelé **événement élémentaire**.

Application 7

On lance un dé équilibré à six faces.

1. Donner l'ensemble des issues de l'événement A : « obtenir un nombre pair »
2. Donner l'ensemble des issues de l'événement B : « obtenir un multiple de 3 »
3. Donner un exemple d'événement élémentaire C.

Définition 7 (Événement certain et événement impossible)

La partie Ω est appelé **événement certain** : il contient toutes les issues. La partie vide de l'univers, notée $\emptyset$, est appelée **événement impossible** : il ne contient aucune issue.

Application 8

On jette un dé équilibré à six faces.

1. Donner un exemple d'événement certain D.
2. Donner un exemple d'événement impossible E.

2.2 Réunion et intersection de deux événements

Définition 8 (Réunion)

La **réunion** de deux événements A et B est l'événement noté $A \cup B$ qui contient les issues appartenant à A **ou** B.

Définition 9 (Intersection)

L'**intersection** de deux événements A et B est l'événement noté $A \cap B$ qui contient les issues appartenant à A **et** B.

Application 9

On lance un dé équilibré à six face. On considère les événements A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un multiple de 3 ».

1. Décrire les événements $A \cap B$ et $A \cup B$.
2. Donner les issues contenues dans $A \cap B$ et $A \cup B$.

Définition 10 (Événements incompatibles)

Deux événements A et B sont dits **incompatibles** ou **disjoints** lorsque leur intersection est vide, c'est-à-dire

$$A \cap B = \emptyset.$$

Définition 11 (Événement contraire)

L'événement **contraire**, ou **complémentaire**, d'un événement A, est l'événement constitué de toutes les issues de l'ensemble Ω qui n'appartiennent pas à A. On le note $\overline{A}$.

Application 10

On lance un dé équilibré à six faces.

1. Donner un exemple de deux événements F et G qui sont incompatibles.
2. On redonne les événements A : « obtenir un nombre pair » et B : « obtenir un multiple de 3 ». Décrire les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

2.3 Probabilité d'un événement

Définition 12 (Probabilité d'un événement)

La **probabilité d'un événement** est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent. La probabilité de l'ensemble vide est 0.

Application 11

On jette un dé équilibré à six faces.

1. On note A l'événement « Obtenir un multiple de 3. ».
   (a) Donner les issues qui constituent cet événement.
   (b) Calculer $P(A)$, la probabilité de cet événement.
2. On note B l'événement « Obtenir un nombre supérieur ou égale à 2. ».

(a) Donner les issues qui constituent cet événement.

(b) Calculer $P(B)$, la probabilité de cet événement.

Propriété 1

On a $P(\Omega) = 1$ et, pour tout événement A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

Propriété 2

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est

$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre total d'issues}}.$$

Notation 13

Le nombre d'issues favorables à un événement A est appelé **cardinal** et est noté

$$\mathrm{Card}(A).$$

Remarque

Avec la notation précédente, en cas d'équiprobabilité, on a

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

Application 12

On lance un dé équilibré icosaédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 20.

1. Justifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité.
2. Déterminer la probabilité de l'événement A : « obtenir un nombre supérieur ou égal à 15. »

3 Calculs de probabilités

3.1 Probabilité d'une union

Propriété 3

Quels que soient les événements A et B de Ω, on a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Propriété 4

Si A et B sont deux événements incompatibles, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

3.2 Probabilité de l'événement contraire

Propriété 5

Pour deux événements contraire A et $\overline{A}$, on a

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A).$$

Application 13

On considère une expérience aléatoire dont l'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$. Les sept événements élémentaires sont équiprobables. On considères les événements

$$A = \{2; 3; 4\} \qquad B = \{3; 4; 5; 7\} \qquad C = \{1; 5\}$$

1. Donner l'écriture ensembliste de $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $A \cap B$.
2. Calculer les probabilités suivantes : $P\left(\overline{A}\right)$, $P\left(\overline{B}\right)$, $P(A \cap B)$ et $P(A \cup C)$.
3. Calculer $P\left(A \cup B\right)$ de deux façons différentes.

3.3 Arbre de dénombrement

Application 14

Une urne contient quatre jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à 4. On en tire deux successivement, sans remettre dans l'urne le premier jeton tiré. On ajoute ensuite les deux numéros obtenus.

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

— A : « la somme obtenue est paire »

— B : « la somme obtenue est inférieure ou égale à 8 »

— C : « la somme obtenue est inférieure ou égale à 5 »

3.4 Tableau à double entrée

Application 15

Le lycée Corot est composé d'environ 2500 élèves, dont 1300 femmes et 1200 hommes. On réalise une étude dans le lycée, sur les habitudes alimentaires des élèves au sujet des fast-food. Les résultats de l'étude indiquent que :

— parmi les hommes, la moitié mange dans des fast-food régulièrement et 25% de manière occasionnelle ;

— un cinquième des femme y mange régulièrement ;

— autant de femmes que d'hommes y mange occasionnellement.

1. Compléter le tableau suivant.

	Hommes	**Femmes**	**Total**
Clients réguliers			
Clients occasionnels			
Non clients			
Total			

2. On rencontre au hasard un élève de l'établissement. Chaque élève a la même probabilité d'être rencontré. On considère les événements suivants :

   — A : « l'élève rencontré n'est pas client dans les fast-food »

   — B : « l'élève rencontré est une femme »

   — C : « l'élève rencontré est un client régulier »

   Calculer la probabilité des événements A, B et C.
3. Traduire par une phrase les événements $A \cap B$, $\overline{B} \cap C$ et $B \cup C$.
4. Déterminer la probabilité des événements $A \cap B$, $\overline{B} \cap C$ et $B \cup C$.