Chapitre 5 : Information chiffrée

1 Proportion et pourcentage

1.1 Calculer un pourcentage

Propriété 1

Soit $t > 0$ un nombre positif. Prendre $t\%$ d'une quantité, c'est la multiplier par $\frac{t}{100}$.

Exemple 1

Prendre 4% de 120 euros correspond à

$$\frac{4}{100} \times 120 = 4{,}8 \text{ euros.}$$

Application 2

1. Prendre 18% de 500.
2. Calculer 33% de 921.

1.2 Exprimer une proportion

Définition 1 (Population et sous-population)

Soient E un ensemble de référence non vide et n_E le nombre d'éléments de E. Soient A une partie de l'ensemble E et n_A le nombre d'éléments de A.

— L'ensemble E est appelé la **population**, les éléments de E sont appelés les **individus**, et le nombre d'individus n_E est appelé l'**effectif** de E.

— L'ensemble A est appelé **sous-population**, et n_A est appelé l'effectif de A.

Application 3

On considère une classe de 35 élèves, dont 20 sont des filles. On pose alors E l'ensemble des élèves de la classe et A l'ensemble des filles de la classe.

— Quel ensemble est la population ? Quel est son effectif ?

— Quel ensemble est la sous-population ? Quel est son effectif ?

Définition 2 (Proportion)

Soit E une population et A une sous-population. La **proportion** p de A dans E est le réel défini par

$$p = \frac{n_A}{n_E}.$$

Application 4
Lors d'une élection, sur 864 inscrits, 648 personnes ont voté. Quelle est la proportion de votants ?

Remarque
Une proportion peut être exprimée sous forme décimale, sous forme de fraction, ou de pourcentage

$$0{,}3 = \frac{30}{100} = 30\%.$$

Application 5
Au sein du lycée Toroc, il y a 2400 élèves, dont 1800 sont demi-pensionnaires.

1. Donner, sous forme décimale, la proportion d'élèves demi-pensionnaires dans le lycée Toroc.
2. Donner cette proportion sous forme fractionnaire et sous forme de pourcentage.

Propriété 2
Connaissant la proportion p de A dans E, on peut retrouver l'effectif manquant n_A ou n_E :

$$n_A = p \times n_E \text{ et, pour } p \neq 0,\ n_E = \frac{n_A}{p}.$$

Propriété 3
Pour tout ensemble A contenu dans un ensemble non vide E, on a $0 \leq p \leq 1$.

Exemple 6
Sachant que $n_A = 200$ et que $p = 0{,}25$, on retrouve l'effectif n_E de la population avec le calcul

$$n_E = \frac{n_A}{p} = \frac{200}{0{,}25} = 800.$$

Application 7
On s'intéresse à la composition d'une tablette de chocolat de 180 g.

1. Elle comporte 72 g de sucre : quelle est la proporion (en pourcentage) cela représente-t-il ?
2. Le cacao constitue 55% de la tablette : quelle masse cela représente-t-il ?

1.3 Pourcentage de pourcentage

Propriété 4
Soient E une population et A une sous-population de E de proportion p_A. Soit B une sous-population de A de proportion p_B par rapport à A. Alors B est une sous-population de E, et la proportion de B par rapport à E est $p = p_A \times p_B$.

Exemple 8
Le Syndicat des Éditeurs de Logiciels de Loisirs déclare que 53% des français jouent régulièrement aux jeux vidéos. Parmi eux, 47% sont des femmes. En notant p la proportion de femmes jouant aux jeux vidéos parmi tous les français, on a

$$p = \frac{53}{100} \times \frac{47}{100} = 0{,}2491 = 24{,}91\%.$$

Parmi l'ensemble des français, la proportion de femmes jouant aux jeux vidéos est de 24,91%.

Application 9

Dans une boulangerie, le rayon pâtisserie représente 30% du montant des ventes par jour et on sait que 3 pâtisseries sur 5 sont des éclairs au chocolat.
Le propriétaire ne fait un bénéfice que si le montant des ventes d'éclairs au chocolat représente plus de 20% de la recette par jour.

1. Quelle proportion de la recette (en pourcentage) représente le montant des ventes d'éclairs au chocolat ?
2. Le propriétaire doit-il continuer à proposer des éclairs au chocolat ? Justifier.

2 Taux d'évolution

On considère une quantité qui varie. On note

— V_D la **valeur de départ** de cette quantité ;

— V_A la **valeur d'arrivée** de cette quantité.

2.1 Variation absolue et variation relative

Définition 3 (Variation absolue)

La **variation absolue** ΔV est donnée par $\Delta V = V_A - V_D$.

Définition 4 (Variation relative)

La **variation relative** (ou **taux d'évolution**) t est le quotient de la différence V_A et V_D par V_D. On a donc

$$t = \frac{V_A - V_D}{V_D}.$$

Remarque

Si la quantité **augmente**, les variations sont **positives**. Si la quantité **diminue**, alors les variations sont **négatives**.

Exemple 10

Dans la ville de Trifouilli-Les-Oies, il a fait 10°C en moyenne le lundi, et 15°C en moyenne le mardi.

— On identifie $V_D = 10$ et $V_A = 15$.

— La variation absolue est de $\Delta V = 15 - 10 = 5$°C.

— Le taux d'évolution est de $\frac{15-10}{10} = 0{,}5$. En pourcentage, le taux d'évolution est de 50%.

Application 11

Adam place 110 euros en Bourse. Il se rend compte 15 jours plus tard que ses actions valent 132 euros.

1. Calculer la variation absolue de la somme placée.
2. Calculer la variation relative de cette somme placée (en pourcentage).

2.2 Coefficient multiplicateur

Définition 5 (Coefficient multiplicateur)
On considère une quantité qui passe de la valeur V_D à V_A. Le **coefficient multiplicateur**, noté CM, associé à cette évolution est
$$CM = \frac{V_A}{V_D}.$$

Propriété 5
Le coefficient multiplicateur permet de passer de la valeur de départ à la valeur d'arrivée (et inversement).
$$V_A = CM \times V_D \qquad\qquad V_D = \frac{V_A}{CM}$$

Propriété 6
Soit t le taux d'évolution qui permet à une quantité de passer de V_D à V_A. On a alors
$$V_A = (1+t) \times V_D.$$
On a donc $CM = 1 + t$.

taux d'évolution t
$$\begin{tikzcd} V_D \arrow[r, bend left, "\times CM"] & V_A \end{tikzcd}$$

Propriété 7
— Dans le cas d'une baisse, t est négatif et CM est un réel compris entre 0 et 1.
— Dans le cas d'une augmentation, t est positif et CM est un réel supérieur 1.

Exemple 12
Un article à 85 euros est soldé à -25%. On a $V_D = 85$ et $t = -25\% = -0{,}25$. On en déduit
$$CM = 1 + (-0{,}25) = 0{,}75$$
et
$$V_A = V_D \times CM = 85 \times 0{,}75 = 63{,}75.$$
Le nouveau prix de cet article est 63,75 euros.

Application 13
Adam effectue un autre placement de 110 euros. Ses actions risquent de subir une des deux modifications suivantes : soit elles augmentent de 10%, soit elles baissent de 15%.
1. Donner les cofficients multiplicateurs liés à chacune de ces évolutions.
2. Dans chacun des cas, calculer la nouvelle valeur de ses actions.

3 Évolutions successives et réciproques

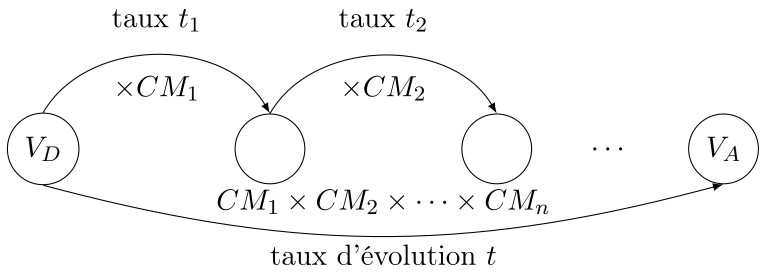
3.1 Évolutions successives

Définition 6 (Évolutions successives et globale)
Lorsqu'une quantité subit des **évolutions successives** de taux $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de sa valeur, elle subit alors une **evolution globale** de taux t.

Propriété 8

Le coefficient multiplicateur global CM associé à l'évolution t est le produit des coefficients multiplicateurs $CM_1, CM_2, \dots, CM_n$, associés respectivement aux évolutions $t_1, t_2, \dots, t_n$. On a

$$CM = CM_1 \times CM_2 \times \cdots \times CM_n.$$



Exemple 14

Une valeur subit une hausse de 6% puis une hausse de 14%. Le coefficient multiplicateur associé au taux d'évolution global t est alors

$$CM = 1{,}06 \times 1{,}14 = 1{,}2084.$$

On en déduit $t = 1{,}2084 - 1 = 0{,}2084$ soit une augmentation globale de 20,84%.

Remarque

Attention ! Le taux d'évolution global n'est pas égal à somme des taux d'évolution successifs.

Application 15

Déterminer le taux d'évolution global d'une valeur suite à une augmentation de 50% puis à une diminution de 50%.

3.2 Évolutions réciproques

Définition 7 (Taux réciproque)

Une quantité non nulle V_D subit une évolution de taux t et devient égale à une quantité V_A. Le **taux réciproque** de t est le taux t' permettant de passer de V_A à V_D.

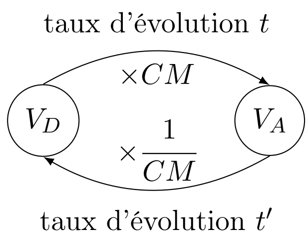
Exemple 16

Un article coûte 50 euros. Une baisse de 20% fait passer le prix à 40 euros. Il faut une augmentation de 25% pour revenir au prix initial de 50 euros. Ici $t = -20\%$ et $t' = +25\%$.

Propriété 9

Le coefficient multiplicateur réciproque CM' associé à l'évolution réciproque t' est l'inverse du coefficient multiplicateur non nul CM associé à l'évolution de départ t. On a

$$CM' = \frac{1}{CM}.$$



Application 17

Déterminer l'évolution réciproque d'une augmentation de 60%.