

## Chapitre 3 : Géométrie dans le plan



### 1 Coordonnées d'un point du plan

#### 1.1 Repères du plan

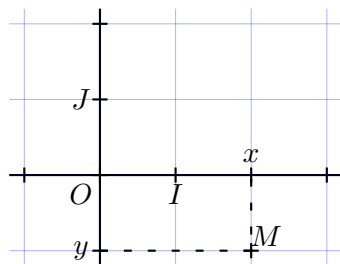
##### Définition 1 (Repère, origine, et axes)

Soient  $O$ ,  $I$  et  $J$  trois points distincts du plan. On dit que le triplet  $(O; I, J)$  forme un repère du plan lorsque les points  $O$ ,  $I$ , et  $J$  ne sont pas alignés. Dans ce cas :

- le point  $O$  est l'**origine** du repère ;
- la droite orientée  $(OI)$  est l'**axe des abscisses** et la distance  $OI$  donne l'unité sur cet axe ;
- la droite orientée  $(OJ)$  est l'**axe des ordonnées** et la distance  $OJ$  donne l'unité sur cet axe.

##### Définition 2 (Coordonnées)

Repérer un point  $M$  dans un repère  $(O; I, J)$ , c'est donner l'unique couple de nombres réels  $(x; y)$  appelé **coordonnées** du point  $M$ . Le nombre  $x$  est l'**abscisse** du point  $M$  et le nombre  $y$  est l'**ordonnée** du point  $M$ .



##### Application 1

Dans le repère juste au-dessus, donner les coordonnées des points  $O$ ,  $I$ ,  $J$ , et  $M$ .

##### Remarque

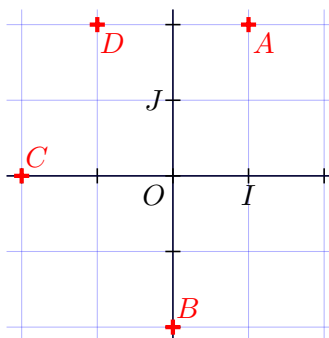
Si les droites  $(OI)$  et  $(OJ)$  sont perpendiculaires, le repère  $(O; I, J)$  est **orthogonal**. Si, de plus, les longueurs  $OI$  et  $OJ$  sont égales, alors  $(O; I, J)$  est dit **orthonormé**.

##### Notation 3

On écrit souvent les coordonnées d'un point  $A$  à l'aide de la notation  $A(x_A; y_A)$ .

##### Application 2

- L'ordonnée du point  $A$  est :
- L'abscisse du point  $B$  est :
- Les coordonnées de  $C$  sont :
- Les coordonnées de  $D$  sont :



## 1.2 Coordonnées du milieu d'un segment

### Propriété 1

Dans le plan muni d'un repère  $(O; I, J)$ , on considère les points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$ . Le milieu  $K$  du segment  $[AB]$  a pour coordonnées  $(x_K; y_K)$  définies par

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2} \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

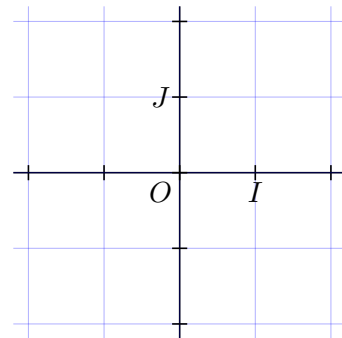
### Remarque

L'abscisse de  $K$  est la moyenne des abscisses de  $A$  et  $B$ . L'ordonnée de  $K$  est la moyenne des ordonnées de  $A$  et  $B$ .

### Application 3

Soient  $A(1; 1)$ ,  $B(-2; 0)$ ,  $C(-1; -2)$  et  $D(2; -1)$  quatre points dans un repère  $(O; I, J)$ .

1. Placer ces points dans le repère ci-contre.
2. Calculer les coordonnées de  $K$ , le milieu de  $[AC]$ .
3. Calculer les coordonnées de  $L$ , le milieu de  $[BD]$ .
4. Le quadrilatère  $ABCD$  est-il un parallélogramme ?



## 2 Distance dans un repère orthonormé

### Propriété 2

Dans un repère orthonormé du plan, la distance entre deux points  $A$  et  $B$  de coordonnées respectives  $(x_A; y_A)$  et  $(x_B; y_B)$  est donnée par

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

### Application 4

Soit  $(O; I, J)$  un repère orthonormé et  $A(-1; 2)$  et  $B(4; 3)$ . Calculer la distance  $AB$ .

### Application 5

Dans un repère orthonormé  $(O; I, J)$  du plan, on considère les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $M$  de coordonnées respectives  $(-2; 3)$ ,  $(3; 4)$ ,  $(3; -2)$  et  $(1; 1)$ .

Montrer que  $A$ ,  $B$ , et  $C$  appartiennent à un même cercle de centre  $M$ .

### Propriété 3

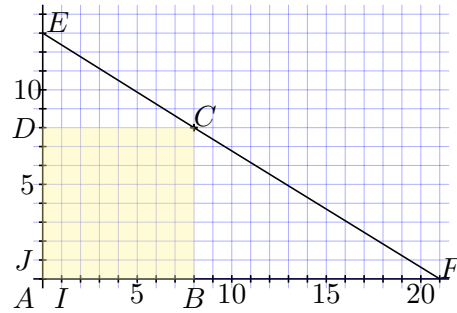
Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois points distincts du plan. Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés dans cet ordre si, et seulement si,  $AC = AB + BC$ .

### Application 6

Soit  $(O; I, J)$  un repère orthonormé et  $A(-2; -2)$ ,  $B(3; 1)$  et  $C(8; 4)$  trois points de ce repère. Ces points sont-ils alignés ?

**Application 7**

Dans le repère orthonormé  $(A; I, J)$ , on considère la figure ci-contre composée d'un carré  $ABCD$  et de deux points  $E$  et  $F$ . Les points  $E, C$  et  $F$  sont-ils alignés ?



**3 Configurations du plan**

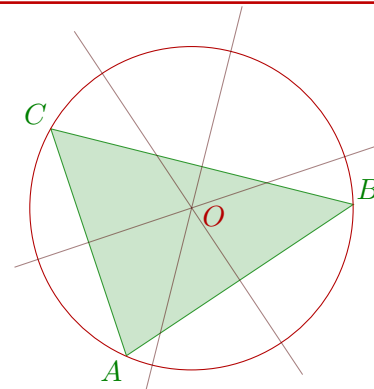
**3.1 Propriétés dans le triangle**

**Définition 4 (Cercle circonscrit)**

Le **cercle circonscrit** à un triangle est le cercle passant par les trois sommets du triangle.

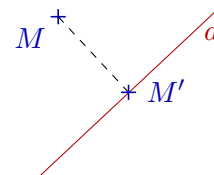
**Propriété 4**

Dans un triangle, les médiatrices des côtés sont concourantes en un point  $O$  qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.



**Définition 5 (Projeté orthogonal)**

Soient  $d$  une droite et  $M$  un point extérieur à  $d$ . On dit que  $M'$  est le **projeté orthogonal** de  $M$  lorsque le point  $M'$  appartient à la droite  $d$  et que les droites  $(MM')$  et  $d$  sont perpendiculaires.

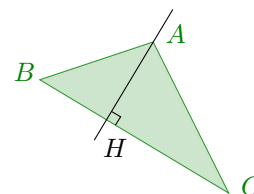


**Propriété 5**

Le projeté orthogonal d'un point  $M$  sur une droite  $d$  est le point de  $d$  le plus proche de  $M$ .

**Définition 6 (Hauteur)**

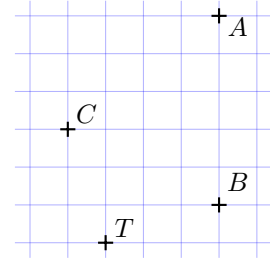
Dans un triangle  $ABC$ , la **hauteur** issue du sommet  $A$  est la droite passant par  $A$  et par  $H$ , le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$  : il s'agit de la droite  $(AH)$ .



**Application 8**

On considère les points dans le repère ci-contre.

1. En utilisant les carreaux, justifier que la droite  $(AT)$  est la médiatrice du segment  $[BC]$ .
2. Que peut-on déduire pour les droites  $(BC)$  et  $(AT)$  ?

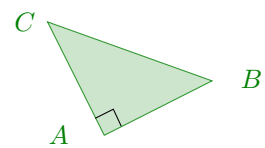


**3.2 Trigonométrie**

**Définition 7 (Cosinus et sinus)**

Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$ . On définit alors le **cosinus** et le **sinus** de l'angle  $\widehat{ABC}$  de la façon suivante.

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \text{ et } \sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}.$$



**Propriété 6**

Si  $\alpha$  est la mesure d'un angle aigu dans un triangle rectangle alors  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ .

**Application 9**

1. Démontrer que le triangle  $ABC$  tel que  $AB = 12$ ,  $BS = 5$  et  $AC = 13$  est rectangle.
2. Calculer la mesure de l'angle  $\widehat{BAC}$ .

**3.3 Quadrilatères**

**Définition 8 (Parallélogramme)**

Un parallélogramme  $ABCD$  est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.

**Propriété 7**

Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Ce point est un centre de symétrie du quadrilatère. Ses côtés opposés sont de même longueur deux à deux.

**Définition 9 (Autres parallélogrammes)**

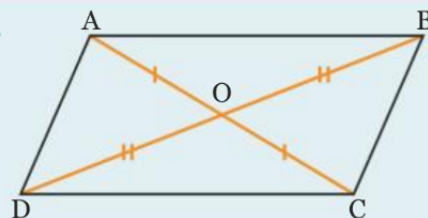
Les carrés, les losanges et les rectangles sont des parallélogrammes. Toutes les propriétés des parallélogrammes s'appliquent à eux, mais ils vérifient aussi d'autres propriétés :

**Rectangle :** tous ses angles sont droits et ses diagonales sont de même longueur.

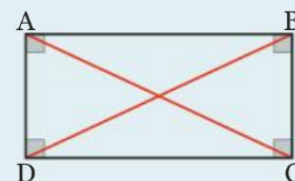
**Losange :** les diagonales sont perpendiculaires et tous ses côtés sont de même longueur.

**Carré :** c'est à la fois un rectangle et un losange.

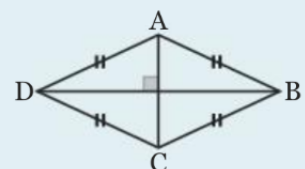
**Exemples.**



• rectangle :



• losange :



• carré :

