Chapitre 4 : Résolution d'équation

1 Équations du premier degré

Définition 1 (Équation)
Une **équation** est une égalité contenant une quantité inconnue (souvent notée x, ou y, ou t, ...).

Exemple 1
L'égalité $x-3=2$ est une équation dont l'inconnue est x.

Définition 2 (Résolution d'une équation)
Résoudre une équation (dans $\mathbb{R}$) consiste à déterminer les valeurs que peut prendre l'inconnue (dans $\mathbb{R}$) pour rendre l'égalité vraie. Ces valeurs sont appelées les **solutions** de l'équation.

Exemple 2
Considérons l'équation $x-3=2$. Le nombre 5 est une solution de cette équation car l'égalité $5-2=3$ est vraie.

Propriété 1
Effectuer **la même opération** (addition, soustraction, multiplication, division, ...) des deux côtés d'une égalité conserve cette égalité.

Notation 3
Lorsque deux équations d'inconnue x sont vraies pour les mêmes valeurs de x, on dit qu'elles sont **équivalentes** et on utilise le symbole $\iff$.

Remarque
Attention ! Il ne faut pas confondre les symboles $=$ et $\Leftrightarrow$. Ils ne veulent **pas** dire la même chose.

Exemple 3
En ajoutant 3 des deux côtés de l'égalité, on peut écrire

$$\begin{aligned} x-3=2 &\iff x-3+3=2+3 \\ &\iff x=5 \end{aligned}$$

Méthode
1. On applique des opérations successives aux deux membres de l'équation afin d'obtenir l'inconnue d'un seul côté.
2. On obtient ensuite la valeur de l'inconnue en multipliant ou divisant par le nombre approprié.

Application 4

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $6x + 7 = 0$ **b)** $8x - 1 = 2x + 4$ **c)** $3(4x - 1) = 12x + 2$

Notation 4

Si une équation a, par exemple, le nombre 1 pour solution, on écrira que l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathscr{S} = \{1\}$.

Notation 5

Si une équation n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$, on note l'ensemble de ses solutions $\mathscr{S} = \emptyset$. Cet ensemble est appelé **ensemble vide** et ne contient aucun élément.

2 Équations produit nul

Propriété 2

Un produit est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul.

Exemple 5

On considère l'équation $(3x + 2)(4x - 6) = 0$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(3x+2)(x-6) = 0 &\iff 3x + 2 = 0 \text{ ou } x - 6 = 0\\ &\iff 3x = -2 \text{ ou } x = 6\\ &\iff x = \frac{-2}{3} \text{ ou } x = 6\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$ est donc $\mathscr{S} = \left\{\frac{-2}{3}; 6\right\}$.

Application 6

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

a) $(5x - 2)(x + 3) = 0$ **b)** $\left(2x - \frac{1}{3}\right)(1 - x) = 0$

3 Résolution d'un problème concret

Méthode

Pour répondre un problème :

1. on analyse l'énoncé pour comprendre quelle est la quantité inconnue et on lui donne un nom, par exemple x ;
2. on traduit l'énoncé en une équation avec notre inconnue x ;
3. on résout l'équation ;
4. on donne la solution au problème concret.

Application 7

Un père a 48 ans, son fils a 14 ans. Dans combien d'années le père aura exactement trois fois l'âge de son fils ?