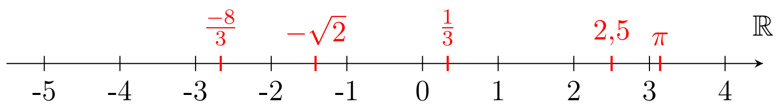
Chapitre 1 : Ensembles de nombres

1 Ensembles de nombres

Notation 1
Le symbole $\in$ se lit «**appartient à**». Le symbole $\notin$ se lit «**n'appartient pas à**».

Exemple 1
On a $5 \in \mathbb{N}$ et $-1 \notin \mathbb{N}$.

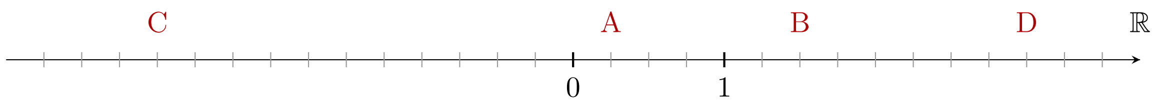
Ensemble de nombres	Définition	Notation	Exemple	Contre-Exemple
Nombres **entiers** naturels	Un nombre entier **naturel** est un nombre entier positif ou nul.	$\mathbb{N}$		
Nombres **entiers** relatifs	Un nombre entier **relatif** est un nombre entier positif, négatif ou nul.	$\mathbb{Z}$		
Nombres **décimaux**	Un nombre **décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^k}$ où $a \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$	$\mathbb{D}$		
Nombres **rationnels**	Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$	$\mathbb{Q}$		
Nombres **réels**	On considère une droite graduée et à chaque point de la droite on associe un nombre, son abcisse. Les **nombres réels** sont les abcisses de tous les points de la droite graduée.	$\mathbb{R}$		



Application 2
Donner :

1. un nombre appartenant aux deux ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$;
2. un nombre appartenant à $\mathbb{Z}$ mais pas à $\mathbb{N}$;
3. un nombre appartenant à $\mathbb{Q}$ mais pas à $\mathbb{D}$;
4. deux nombres appartenant à $\mathbb{D}$;
5. un nombre n'appartenant ni à $\mathbb{D}$, ni à $\mathbb{Q}$;
6. un nombre irrationnel.

Application 3
Donner les abscisses des points placés sur la droite numérique ci-dessous.



Remarque

Un **nombre décimal** a une écriture décimale finie, et réciproquement, tout nombre qui a une écriture décimale finie est un nombre décimal.

Notation 2

Le symbole $\subset$ se lit «**est inclus dans**» et le symbole $\not\subset$ se lit «**n'est pas inclus dans**».

Propriété 1 (admise)

On a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Remarque

Les symboles $\in$ et $\subset$ ne sont pas équivalents, attention à ne pas les confondre. On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$: l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$; tandis qu'on a $-5 \in \mathbb{Z}$: le nombre -5 est **un élément** de $\mathbb{Z}$.

Application 4

Compléter les pointillés avec le symbole correspondant $(\in, \notin, \subset, \not\subset)$.

a) $8 \dots \mathbb{N}$ *b)* $-7{,}5 \dots \mathbb{D}$ *c)* $\dfrac{1}{4} \dots \mathbb{Z}$ *d)* $\mathbb{D} \dots \mathbb{N}$ *e)* $\sqrt{5} \dots \mathbb{Q}$

f) $-\dfrac{6}{2} \dots \mathbb{Z}$ *g)* $\dfrac{2}{3} \dots \mathbb{D}$ *h)* $\mathbb{Z} \dots \mathbb{R}$ *i)* $\pi \dots \mathbb{R}$ *j)* $\mathbb{N} \dots \mathbb{Q}$

2 Arithmétique

2.1 Diviseurs et multiples

Définition 3 (Diviseurs et multiples)

Soient a et b deux nombres entiers relatifs (donc $a,b \in \mathbb{Z}$). On dit que a est un **diviseur** de b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$b = k \times a.$$

Dans ce cas, on dit aussi que

— b est un **multiple** de a ;

— a **divise** b ;

— b est **divisible** par a.

Application 5

1. Donner les diviseurs de 18, 12.
2. Donner les multiples de 7 inférieurs à 50.

Application 6

Simplifier les fractions suivantes

$$\frac{120}{39} = \qquad \frac{66}{42} = \qquad \frac{108}{32} =$$

2.2 Parité

Définition 4 (Nombres pairs ou impairs)
Soit $a \in \mathbb{Z}$ un entier relatif, on dit que a est un nombre
- **pair** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k$;
- **impair** s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2 \times k + 1$.

Remarque
Ce sont les définitions que vous connaissiez déjà : un nombre est **pair** s'il est divisible par 2. On dit qu'il est **impair** s'il n'est pas divisible par 2.

Application 7
Expliquer pourquoi les nombres 12 ou 70 sont pairs. Expliquer pourquoi les nombres 13 ou 39 sont impairs.

2.3 Nombre premier

Définition 5 (Nombre premier)
Un entier naturel est dit **premier** s'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Application 8
Donner tous les nombres premiers inférieurs à 10.

Remarque
Le nombre 1 **n'est pas un nombre premier** car il a un seul diviseur.

Application 9
Donner la décomposition comme produit de nombres premiers de chacun des nombres suivants.

$40 =$ $12 =$ $75 =$ $126 =$

3 Intervalles

Définition 6 (Intervalle)
Un **intervalle** de $\mathbb{R}$ est une partie de $\mathbb{R}$ qui correspond à un segment, une demi-droite, ou à la droite toute entière.

3.1 Intervalle borné

On considère deux réels a et b tels que $a < b$.

L'ensemble des réels x tels que	est représenté par un **segment** sur une droite graduée :	Notation de l'intervalle	Type de l'intervalle
$a \leq x \leq b$		$[a; b]$	
$a < x < b$		$]a; b[$	
$a \leq x < b$		$[a; b[$	
$a < x \leq b$		$]a; b]$	

Application 10

Compléter le tableau suivant.

L'ensemble des réels x tels que	est représenté par	Intervalle	Type de l'intervalle
$8 < x < 15$			
		$x \in]-2;1[$	

Remarque

L'ordre des réels a une importance. L'intervalle $[3;4]$ existe alors que $[4;3]$ n'existe pas. Pour les ensembles de solutions, écrits entre accolades, l'ordre n'a pas d'importance : $\{4;3\}$ existe.

3.2 Intervalle non borné

On considère deux réels $a,b \in \mathbb{R}$.

L'ensemble des réels x tels que	est représenté par une **demi-droite** sur une droite graduée :	Notation de l'intervalle
$x \geq a$		$[a;+\infty[$
$x > a$		$]a;+\infty[$
$x \leq b$		$]-\infty;b]$
$x < b$		$]-\infty;b[$

Application 11

Compléter le tableau suivant.

L'ensemble des réels x tels que	est représenté par	Notation de l'intervalle
$x \leq 10$		
		$x \in]-2;+\infty[$